УДК 519.86

Г.Н. Макушева, Т.Г. Шарикова
Алтайский государственный технический университет
О.А. Шавандина
Алтайский государственный университет
г. Барнаул, Российская Федерация

Преподавание математики студентам экономических направлений в свете ФГОС ВО 3++

Аннотация. В статье рассмотрен ряд задач, изучаемых в новой дисциплине «Математика для экономических расчетов», которая вводится для студентов экономических специальностей вузов согласно новым стандартам ФГОС ВО 3++ вместо дисциплины «Математика».

Ключевые слова. Экономические расчеты, предельные затраты предприятия, эластичность, средние издержки, изменение выручки с ростом цен на продукцию при различных видах эластичности спроса, дифференциальное и интегральное исчисление.

В результате перехода бакалавров экономических направлений к новым стандартам ФГОС ВО 3++ предмет «Математика» стал называться «Математика для экономических расчетов». Изменилось не только название предмета, но и требования к результатам его освоения, одним из которых является наличие задач с профессионально-ориентированной составляющей.

Авторы в работе [1] рассмотрели в каких задачах экономики можно использовать элементы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа. Продолжим разговор на эту тему по второму семестру, в котором студенты изучают дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной (ФОП).

Среди задач, которые решаются с помощью производной при изучении темы «Дифференциальное исчисление ФОП», можно выделить следующие: расчет производительности в момент времени *t*, максимально возможной величины финансовых накоплений, предельных затрат предприятия, эластичности, средних издержек, изменения выручки с ростом цен на продукцию при различных видах эластичности спроса и другие.

Задача 1. Определите производительность труда шахтера (усл. ед.) через 3 часа и через 6 часов после того как он приступил к работе, если задана функция, описывающая зависимость объема произведенной работы от времени: $y(t) = -2t^3 - 3t^2 + 2500t + 4300$, где t – время в часах.

Если Δx – количество продукции, на которое увеличится производство продукции x, Δy – увеличение издержек производства y, то производная $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – предельные затраты (издержки) предприятия.

Используя полученную формулу, можно не только решить задачу, но и найти предельную полезность, предельную выручку, предельный доход и другие предельные величины.

Задача 2. Определите средние и предельные издержки производства, если объем выпускаемой продукции равен 20 усл. ед., а взаимосвязь издержек производства и объема выпускаемой продукции описывается уравнением $y = 100x - 0{,}04x^3$ (усл. ден. ед.).

На примере следующей задачи можно показать применение производной в прогнозах и анализе ценовой политики.

Задача 3. Найдите рыночную цену товара, эластичность спроса и предложения для найденной цены, если функция спроса имеет вид: $D = \dfrac{p+10}{p+4}$, а функция предложения – $S = p + 0{,}4$, где p – цена товара (ден. ед.), D – количество покупаемого товара (штук), S – количество предлагаемого товара (штук).

Решение. Рыночная цена товара определяется из условия $S = D$, т.е. решив уравнение $p + 0{,}4 = \dfrac{p+10}{p+4}$, получим $p = 1{,}65$ ден. ед.

Эластичность спроса найдем по формуле $E_p(D) = \dfrac{p}{D} \cdot D'$:

$$E_p(D) = \frac{p}{\dfrac{p+10}{p+4}} \cdot \left(\frac{p+10}{p+4}\right)' = \frac{p(p+4)}{p+10} \cdot \frac{(p+10)' \cdot (p+4) - (p+10) \cdot (p+4)'}{(p+4)^2} =$$

$$= \frac{p}{p+10} \cdot \frac{p+4-p-10}{p+4} = \frac{-6p}{(p+10)(p+4)} = \frac{-6 \cdot 1{,}65}{(1{,}65+10)(1{,}65+4)} = \frac{-9{,}9}{65{,}82} = -0{,}15.$$

В полученном ответе знак минус указывает на падение спроса на товар при увеличении цены, т.е. спрос на товар снизится на 0,15 % при повышении цены на 1 %. Так как $|E_p(D)| < 1$, следовательно, спрос относительно цены неэластичен. Аналогично определим *эластичность предложения по цене* $E_p(S)$ по формуле $E_p(S) = \dfrac{p}{S} \cdot S'$: $E_p(S) = \dfrac{p}{p+0{,}4} \cdot (p+0{,}4)' = \dfrac{1{,}65}{1{,}65+0{,}4} = 0{,}80$.

Полученный положительный ответ говорит о том, что при увеличении стоимости товара на 1% предложение возрастет на 0,80 %. Так как $|E_p(S)| < 1$, значит, предложение относительно цены неэластично.

Экономические задачи на оптимизацию, в которых нужно найти максимальную прибыль, оптимальное количество выпускаемой продукции, минимальные издержки, наибольшую производительность труда, объем производства, при котором удельные затраты будут наименьшими и др. можно так же решить с использованием производной.

Задача 4. Определите оптимальное количество производимого предприятием товара, если доход от продажи 1 ед. товара равен 59 (усл. ден. ед.), а взаимосвязь издержек производства y (усл. ден. ед.) и количества производимого товара x (штук) описывается функцией $y(x)=\frac{7}{2}x^2+3x+12$.

Один из наиболее знаменитых экономических законов – закон убывающей доходности – звучит следующим образом: с увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает. Иными словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δx – приращение ресурса, а Δy – приращение выпуска продукции, уменьшается при увеличении x. Закон убывающей доходности формулируется так: функция $y = f(x)$, выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией, выпуклой вверх [2].

На примере задачи 5 можно показать применение понятия выпуклости функции к решению экономических задач.

Задача 5. Найдите промежуток изменения капитальных затрат, на котором их увеличение будет неэффективным, если функция зависимости объема выпускаемой продукции y от капитальных затрат x имеет вид: $y(x)=y_0\ln\left(4+x^3\right)$, где y_0 – предельно допустимый объем выпускаемой продукции.

Далее рассмотрим экономические приложения интеграла.

В экономических задачах часто нужно найти функции по заданным предельным величинам, т.е., если, например, $f(x)$ – функция предельных издержек производства, то функцию издержек $F(x)$ можно найти, проинтегрировав функцию $f(x)$: $\int f(x)=F(x)+C$.

Задача 6. Найдите функцию издержек производства $F(x)$ и издержки производства (усл. ден. ед.), планирующего выпустить 20 ед. изделий, если функция предельных издержек имеет вид: $f(x)=3x^2-3x+100$.

Решение. Проинтегрировав функцию предельных издержек, найдем функцию издержек производства:

$\int f(x)=\int\left(3x^2-3x+100\right)dx=x^3-\frac{3}{2}x^2+100x+C$, т.е. $F(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+100x+C$.

Определим издержки на производство 20 единиц изделий:

$$\int_0^{20}\left(3x^2-3x+100\right)dx=\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+100x\right)\Bigg|_0^{20}=10600\ (\textit{усл. ден. ед.}).$$

Если функция $f(x)$ характеризует изменение производительности предприятия за промежуток времени $[0;T]$, то объем производимой предприятием продукции V можно вычислить через определенный интеграл:

$$V = \int_0^T f(x)dx\,.$$

С помощью приведенной формулы можно решить, например, задачу 7.

Задача 7. Производительность труда токаря описывается функцией $f(x) = -3x^2 + 24x$. Определите количество деталей (усл. ед.), выточенных токарем: 1) за четвертый час рабочего дня; 2) за весь рабочий день (8 часов); 3) за последний час рабочего дня; 4) сделайте вывод о полученных результатах.

Известной и часто используемой в экономике является производственная функция Кобба-Дугласа.

Если затраты труда $f(t)$ линейно зависимы от времени t при неизменных затратах капитала, то производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид: $f(t) = (\alpha t + \beta)\cdot e^{\gamma t}$ ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - неотрицательные числа), а объем производимой предприятием продукции за T лет находится по формуле:

$$V = \int_0^T (\alpha t + \beta)\cdot e^{\gamma t} dt \ \ (0 \le t \le T).$$

Задача 8. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид: $f(t) = (3t+1)\cdot e^{2t}$. Определите объем производимой предприятием продукции за 6 лет (усл. ед.).

Решение. $V = \int_0^6 (3t+1)\cdot e^{2t}dt = \left| \begin{matrix} u = 3t+1 \ \Rightarrow \ du = 3dt; \\ dv = e^{2t}dt \ \Rightarrow \ v = \int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t} \end{matrix} \right| =$

$$= (3t+1)\cdot \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^6 - \int_0^6 \frac{1}{2}e^{2t}\cdot 3dt = (3t+1)\cdot \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^6 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2t}\Big|_0^6 \approx 1424105 \text{(усл. ед.)}.$$

Используя одно из свойств определенного интеграла (теорему о среднем), можно найти среднее время $y_{ср}$, затраченное на производство единицы продукции в период освоения от x_1 до x_2 штук:

$$y_{ср} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y(x)dx\,,$$

где x – порядковый номер продукта в партии, $y = y(x)$ – функция, задающая изменение затрат времени y на производство единицы продукции в зависимости от степени освоения производства.

Задача 9. Функция изменения затрат времени на изготовление продукции имеет вид: $y = 100x^{-\frac{1}{3}}$ (мин.). Определите среднее время, затраченное на производство 1 ед. продукта в период освоения от $x_1 = 60$ до $x_2 = 80$ ед. продукции.

Решение. $y_{ср} = \frac{1}{80-60}\int_{60}^{80} 100x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{20}\cdot 100\int_{60}^{80} x^{-\frac{1}{3}}dx = 5\cdot\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{60}^{80} \approx 40$ (*мин.*).

При определении экономической эффективности капиталовложений нужно найти начальную сумму по ее конечной величине за t лет при определенной процентной ставке i, т.е. провести дисконтирование. Тогда дисконтированный доход y за время T можно вычислить по формуле:

$y=\int_{0}^{T} f(t)\cdot e^{-i\cdot t}dt$, где $f(t)$ - функция, описывающая поступающий ежегодный доход, $0\le t\le T$ (задача 10).

Задача 10. Первоначальные капиталовложения составили 20 усл. ден. ед., кроме того планируется каждый год увеличивать капиталовложения на 2 усл. ден. ед. Определите дисконтированный доход за четыре года, если процентная ставка равна 10 %.

Использование дифференциального и интегрального исчисления в решении экономических задач развивает у студентов умение анализировать экономические процессы, применять математические методы для решения профессиональных задач, позволяет углубить математический смысл экономических понятий, выразить экономические законы с помощью математических формул.

Список использованной литературы

1. Макушева Г.Н., Шарикова Т.Г., Шавандина О.А. Практико-ориентированный подход к преподаванию математики студентам экономических направлений // Гарантии качества профессионального образования [Электронный ресурс]: материалы XI Международной научно-практической конференции. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2020. – Режим доступа: https://journal.altstu.ru/konf_2020/2020_1/63/

2. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 479 с.

Информация об авторах

Макушева Галина Николаевна – кандидат экономических наук, доцент, кафедра «Высшая математика», Алтайский государственный технический университет, 656038, г. Барнаул, пр-кт Ленина, 46, email: makusheva2005@yandex.ru

Шарикова Татьяна Геннадьевна – кандидат технических наук, доцент, кафедра «Высшая математика», Алтайский государственный технический университет, 656038, г. Барнаул, пр-кт Ленина, 46, email: tgs_xx@rambler.ru

Шавандина Ольга Александровна – кандидат экономических наук, доцент, кафедра «Теория и история государства и права», Алтайский государственный университет, 656049, г. Барнаул, пр-кт Ленина, 61, email: shao07@rambler.ru