

**С.П. Круглов, С.А. Иванченко**

*Иркутский государственный университет путей сообщения. г. Иркутск, Российская Федерация*

## **РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ МАНИПУЛЯТОРА ИНВАЛИДНОГО КРЕСЛА**

**Аннотация:** Создание манипулятора для погрузки и выгрузки инвалидного кресла в/из багажника автомобиля является важным проектом, который направлен на обеспечение водителя-инвалида свободой перемещения без посторонней помощи. Для реализации проекта уже решено ряд важных задач, включая разработку конструкции манипулятора, создание кинематической схемы, решение прямой расширенной задачи кинематики. В данной работе будет рассмотрено оптимальное по быстродействию решение обратной задачи кинематики. **Цель:** решение обратной задачи кинематики специально-го шестизвенного манипулятора, позволяющее найти оптимальные по быстродействию законы управления с соблюдением необходимых ограничений для обеспечения движения кресла манипулятора по назначенной траектории в абсолютном пространстве, связанным с автомобилем. **Методы:** Обратная задача кинематики решается с помощью построения матрицы Якоби [1] с получением векторов минимальной нормы. **Результаты:** Результатом решения являются оптимальные с точки зрения быстродействия зависимости, обеспечивающие выдвигание манипулятора. **Практическая значимость:** Полученные результаты будут использоваться для управления приводами, для обеспечения движения кресла манипулятора по назначенной траектории с учетом ограничений и с заданным угловым положением в абсолютном пространстве, связанным с автомобилем.

**Ключевые слова** – манипулятор, инвалидное кресло, кинематические соотношения, обратная задача кинематики, матрица Якоби.

**S.A. Ivanchenko , S.P. Kruglov**

*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation*

## **SOLUTION OF INVERSE KINEMATICS FOR WHEELCHAIR MANIPULATOR**

**Annotation:** Creating a manipulator for loading and unloading a wheelchair into/from the trunk of a car is an important project, which aims to provide the disabled driver with freedom of movement without assistance. A number of important tasks have already been solved for the realization of the project, including the development of the design of the manipulator, the creation of a kinematic scheme, the solution of a direct extended problem of kinematics. In this work we will consider the optimal solution of the inverse kinematics problem which is optimal in terms of performance. **Objective:** to solve the inverse problem of the kinematics of a specific six-wheel manipulator, allowing to find the optimal laws of control in terms of speed and compliance with necessary limitations to ensure movement of the manipulator's seat along the assigned trajectory in absolute space, associated with the car. **Methods:** The inverse kinematics problem is solved by the Jacobi method [1] with obtaining of vectors of minimal norm. **Result:** The problem is solved stepwise. The desired trajectory is divided into 2 time steps. The first step up to the sixteenth second is a technical extension of the manipulator from the luggage compartment, bending around the car body. The second stage from the 16th second - linear advancement to the driver's seat by the shortest trajectory. **Practical Significance:** The results will be used to control the drives, to ensure the motion of the armchair by the assigned trajectory, taking into account the limitations and with a given angular position in the absolute space associated with the car.

**Key words:** manipulator, wheelchair, kinematic relations, inverse kinematics problem, Jacobi matrix.

### **Введение**

Научная работа по созданию манипулятора для погрузки-выгрузки инвалидного кресла в/из багажника автомобиля водителя-инвалида достаточно востребована, т.к. позволяет водителю с ограниченными возможностями и пользующегося инвалидной коляской без посторонней помощи получить свободу в перемещении. Особенно это важно для отечественных водителей-инвалидов, поскольку такие системы в РФ не выпускаются, а зарубежный заказ требует слишком больших средств.

В ходе работы [2] над манипулятором были сформированы кинематические соотношения, решена прямая расширенная задача кинематики, определяющая угловую ориентацию и положение манипулятора в зависимости от срабатывания его приводов, сформированы зависимости углов присоединенных переменных и линейных силовых приводов.

Данная работа направлена на поиск оптимальных по быстродействию законов управления силовыми приводами для обеспечения движения манипулятора по заданной, требуемой траектории. Решение этой задачи позволит с максимально возможной скоростью выдвигать и задвигать манипулятор, с учетом пространственных ограничений.

Решению обратной задачи кинематики многозвенного манипулятора посвящены множество публикаций, затрагивающие различные методы [3-5]. Настоящая работа посвящена решению обратной задачи кинематики с использованием матрицы Якоби.

Решение обратной задачи кинематики производится путем текущей линеаризации зависимостей вектора сдвига (1) шестой системы координат манипулятора (рис. 1) относительно абсолютной системы координат:

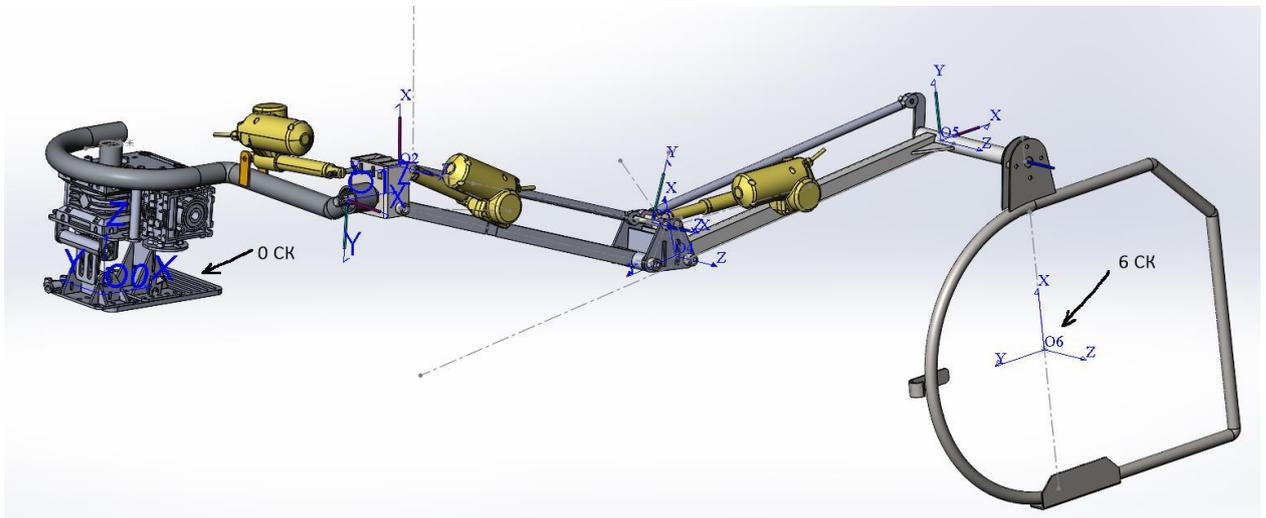


Рис.1. Манипулятор инвалидного кресла в разложенном виде

Зависимости вектора сдвига в нелинеаризованном виде [2]:

$$\begin{cases} Px_6(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = \cos(\theta_1) \cdot f_{61}(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) - \sin(\theta_1) \cdot f_{62}(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6); \\ Py_6(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = \sin(\theta_1) \cdot f_{61}(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) + \cos(\theta_1) \cdot f_{62}(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6); \\ Pz_6(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = 0.37 - \sin(\theta_2) \cdot f_{60}(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) - 0.26 \cdot \cos(\theta_2), \end{cases} \quad (1)$$

где:

$$f_{60}(\cdot) = 0.05 + 0.7 \cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + 0.39 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) - 0.1 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_4) + 0.68 \cos(\theta_3);$$

$$f_{61}(\cdot) = 0.71 - 0.26 \cdot \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \cdot f_{60}(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6);$$

$$f_{62}(\cdot) = 0.14 - 0.7 \sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) - 0.4 \sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6) + 0.16 \sin(\theta_3 + \theta_4) - 0.68 \sin(\theta_3);$$

$$\begin{cases} \theta_2(c_2) = 4.169 \cdot c_2^2 + 13.321 \cdot c_2 - 5.299 \\ \theta_3(c_3) = -47.867 \cdot c_3^2 + 14.765 \cdot c_3 - 2.282 \\ \theta_4(c_3) = 38.916 \cdot c_3^2 - 9.594 \cdot c_3 + 2.209 ; \\ \theta_5(c_4) = 42.331 \cdot c_4^2 - 40.061 \cdot c_4 + 6.759 \\ \theta_6(c_4) = -42.226 \cdot c_4^2 + 40 \cdot c_4 - 7.283 \end{cases}$$

$c_{2-4}$  — положение штока линейного привода в м.

Для линеаризации зависимостей (1) была сформирована матрица Якоби:

$$\begin{bmatrix} \Delta Px_6 \\ \Delta Py_6 \\ \Delta Pz_6 \end{bmatrix} = [J_1, J_2] \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta c_2 \\ \Delta c_3 \\ \Delta c_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

где:  $[J_1, J_2]$  — матрица Якоби;  $J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Px_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Px_6}{\partial c_2} \\ \frac{\partial Py_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Py_6}{\partial c_2} \\ \frac{\partial Pz_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial Pz_6}{\partial c_2} \end{bmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Px_6}{\partial c_3} & \frac{\partial Px_6}{\partial c_4} \\ \frac{\partial Py_6}{\partial c_3} & \frac{\partial Py_6}{\partial c_4} \\ \frac{\partial Pz_6}{\partial c_3} & \frac{\partial Pz_6}{\partial c_4} \end{bmatrix}$  — составные

части матрицы Якоби;  $[\Delta \theta_1 \quad \Delta c_2 \quad \Delta c_3 \quad \Delta c_4]^T$  — вектор с приращениями управлений;

$[\Delta Px_6 \quad \Delta Py_6 \quad \Delta Pz_6]^T$  — вектор приращения координат заданной траектории. Искомыми переменными являются приращения  $\Delta c_3, \Delta c_4$ , обеспечивающие оптимальное с точки зрения быстродействия выдвигание манипулятора по заданной траектории.

## Формирование траектории движения манипулятора

Решение обратной задачи кинематики начинается с построения требуемой траектории (3-5) движения манипулятора. Траектория построена с использованием виртуальной модели, созданной в среде автоматизированного проектирования SolidWorks с учетом кинематических ограничений конструкции. Траектория движения представлена на рисунке 2.

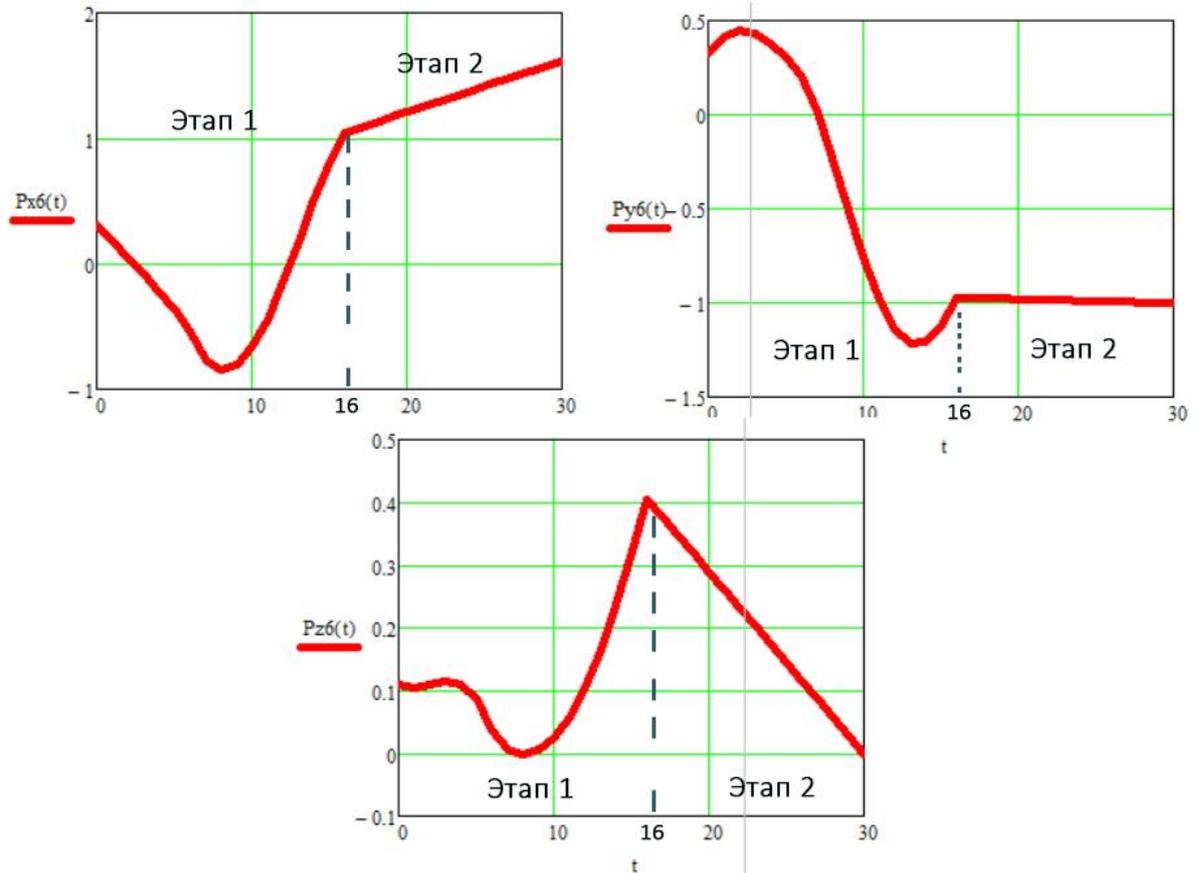


Рис.2. Требуемая траектория движения манипулятора по осям  $Ox(Px6(t)), Oy(Py6(t)), Oz(Pz6(t))$

$$Px6(t) = \begin{cases} 0.31 - 0.133 \cdot t + 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 6.25 \cdot 10^{-4} \cdot t^3, & \text{если } 0 \leq t \leq 6 \\ -0.361 + 0.043 \cdot t - 0.839 \cdot \sin(0.35 \cdot t - 14), & \text{если } 6 < t < 16 \\ 0.041 \cdot t + 0.387, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (3)$$

$$Py6(t) = \begin{cases} 0.33 + 0.118 \cdot t - 0.033 \cdot t^2 + 1.667 \cdot 10^{-3} \cdot t^3, & \text{если } 0 \leq t \leq 6 \\ -0.143 - 0.029 \cdot t + 0.693 \cdot \cos(0.35 \cdot t - 14), & \text{если } 6 < t < 16 \\ -2.143 \cdot 10^{-3} \cdot t - 0.936, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (4)$$

$$Pz6(t) = \begin{cases} 0.11 - 0.012 \cdot t + 8.75 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 1.458 \cdot 10^{-3} \cdot t^3, & \text{если } 0 \leq t \leq 6 \\ -7.143 \cdot 10^{-4} - 5.952 \cdot 10^{-4} \cdot (t-8) + 6.667 \cdot 10^{-3} \cdot (t-8)^2, & \text{если } 6 < t < 16 \\ -0.029 \cdot t + 0.869, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (5)$$

Текущая траектория разбита на два этапа: первый этап с нулевой по шестнадцатую секунду обеспечивает выгрузку манипулятора из багажного отсека с учетом кинематических ограничений. Второй этап с шестнадцатой по тридцатую секунду – линейное перемещение инвалидного кресла к области водительского сиденья.

### Решение обратной задачи кинематики с использованием матрицы Якоби

Методы оптимизации в системах автоматического управления (САУ) позволяют найти наилучшее решение для заданной задачи управления при определенных ограничениях. Наиболее распространенные методы оптимального управления САУ включают в себя: метод оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина [6], методы линейного и нелинейного программирования [7], однако их применение затруднено в силу значительной нелинейности модели объекта управления. На трудности решения задач оптимизации движения манипуляторов также указывают ряд авторов, например [8,9].

Решение обратной задачи кинематики производилось путем текущей линеаризации зависимостей (1). Данный подход выбран в связи с тем, что линеаризованная модель позволяет производить работу со сложными зависимостями. Из уравнения (2) получим:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{x_6} \\ \Delta P_{y_6} \\ \Delta P_{z_6} \end{bmatrix} = J_1 \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta c_2 \end{bmatrix} + J_2 \begin{bmatrix} \Delta c_3 \\ \Delta c_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta c_3 \\ \Delta c_4 \end{bmatrix} = J_2^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta P_{x_6} \\ \Delta P_{y_6} \\ \Delta P_{z_6} \end{bmatrix} - J_1 \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta c_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

где:  $J_1, J_2$  — составные части матрицы Якоби, состоящие из следующих элементов (ниже приведены следующие обозначения:  $c_{1,-2} = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ ;  $s_{1,-2} = \sin(\theta_1 - \theta_2)$ ;  $s_{3,4,5,6} = \sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} &= 0.13 \cdot c_{1,-2} - 0.34 \cdot s_{1,-3} - 0.13 \cdot c_{1,2} + 0.34 \cdot s_{1,3} - 0.14 \cdot c_1 - 0.71 \cdot s_1 + 0.7 \cdot s_{3,4,5} \cdot c_1 - \\ &- 0.39 \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_1 - 0.1 \cdot s_{3,4} \cdot c_1 - 0.05 \cdot c_2 \cdot s_1 + 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_2 \cdot s_1 + 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot c_2 \cdot s_1 - \\ &- 0.68 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot s_1 - 0.7 \cdot c_{3,4,5} \cdot c_2 \cdot s_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} &= 0.34 \cdot c_{1,-3} + 0.13 \cdot s_{1,-2} - 0.34 \cdot c_{1,3} - 0.13 \cdot s_{1,2} + 0.71 \cdot c_1 - 0.14 \cdot s_1 + 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot s_1 - \\ &- 0.39 \cdot s_{3,4,5,6} \cdot s_1 - 0.1 \cdot s_{3,4} \cdot s_1 + 0.05 \cdot c_1 \cdot c_2 - 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_1 \cdot c_2 - 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot c_1 \cdot c_2 + \\ &+ 0.68 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 + 0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot c_1 \cdot c_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial c_2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial c_2} \cdot \left( 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)^2 - 1 \right) \cdot (0.26 \cdot c_2 + 0.05 \cdot s_2 + 0.7 \cdot c_{3,4,5} \cdot s_2 - 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_2 - 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot s_2 + 0.68 \cdot c_3 \cdot s_2)$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial c_2} = -\frac{\partial \theta_2}{\partial c_2} \cdot \begin{pmatrix} 0.025 \cdot c_{1,-2} + 0.13 \cdot s_{1,-2} - 0.025 \cdot c_{1,2} + 0.13 \cdot s_{1,2} - 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_1 \cdot s_2 - \\ - 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot s_1 \cdot s_2 + 0.68 \cdot c_3 \cdot s_1 \cdot s_2 + 0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot s_1 \cdot s_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\delta z}{d\delta 2} = -\frac{\partial \theta_2}{\partial c_2} \cdot \begin{pmatrix} 0.05 \cdot c_2 - 0.26 \cdot s_2 + 0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot c_2 - \\ - 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_2 - 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot c_2 + 0.68 \cdot c_2 \cdot c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_x}{\partial c_3} &= 0.34 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_{1,-3} + 0.34 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_{1,3} + 0.7 \cdot c_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_1 + \\
&+ 0.7 \cdot c_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot s_1 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_1 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_1 - 0.1 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot c_{3,4} \cdot s_1 - \\
&- 0.1 \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot c_{3,4} \cdot s_1 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_1 \cdot c_2 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_1 \cdot c_2 + 0.1 \\
\frac{\partial P_y}{\partial c_3} &= \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot \left( \begin{aligned} &-0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot c_1 + 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_1 - 0.68 \cdot c_1 \cdot c_3 + 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot c_1 + \\ &+ 0.39 \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_2 \cdot s_1 - 0.68 \cdot c_2 \cdot s_1 \cdot s_3 + 0.1 \cdot s_{3,4} \cdot c_2 \cdot s_1 - \\ &- 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot c_2 \cdot s_1 \end{aligned} \right) + \\
&+ \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot \left( \begin{aligned} &-0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot c_1 + 0.39 \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_1 + 0.1 \cdot c_{3,4} \cdot c_1 + 0.39 \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_2 \cdot s_1 + \\ &+ 0.1 \cdot s_{3,4} \cdot c_2 \cdot s_1 - 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot c_2 \cdot s_1 \end{aligned} \right) \\
\frac{\partial P_z}{\partial c_3} &= 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_2 + 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot s_2 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot s_2 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot s_2 - \\
&- 0.1 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_{3,4} \cdot s_2 - 0.1 \cdot \frac{\partial \theta_4}{\partial c_3} \cdot s_{3,4} \cdot s_2 + 0.68 \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial c_3} \cdot s_2 \cdot s_3 \\
\frac{\partial P_x}{\partial c_4} &= 0.7 \cdot c_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot s_1 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_1 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_6}{\partial c_4} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot s_1 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_1 \cdot c_2 + \\
&+ 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_6}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_1 \cdot c_2 - 0.7 \cdot s_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot c_1 \cdot c_2 \\
\frac{\partial P_y}{\partial c_4} &= 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_1 - 0.69 \cdot c_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot c_1 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_6}{\partial c_4} \cdot c_{3,4,5,6} \cdot c_1 + 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_2 \cdot s_1 + \\
&+ 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_6}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot c_2 \cdot s_1 - 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot c_2 \cdot s_1 \\
\frac{\partial P_z}{\partial c_4} &= 0.69 \cdot s_{3,4,5} \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot s_2 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_5}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot s_2 - 0.39 \cdot \frac{\partial \theta_6}{\partial c_4} \cdot s_{3,4,5,6} \cdot s_2
\end{aligned}$$

Искомые переменные, которые обеспечивают оптимальное быстроедействие при движении манипулятора по заданной траектории, являются приращениями зависимостей  $\Delta c_3, \Delta c_4$ . Из полученных приращений были сформированы аппроксимационные зависимости  $c_3, c_4$  (8,9), а выражения  $\theta_1, c_2$  (10,11) явно заданы и обеспечивают выход манипулятора из багажного отсека и обход его боковых стоек. Однако, выражения  $c_3, c_4$  были скорректированы в связи с техническими ограничениями конструкции манипулятора.

#### Аппроксимация и корректировка зависимостей $c_3, c_4$

Полученные значения  $c_3$  с нулевой по пятую секунду принимают значения больше 0.356 м. Однако, максимальный выбег штока линейного привода составляет 0.356 м. Для формирования кинематически реализуемой зависимости движения штока линейного привода примем значения  $c_3$  с нулевой по пятую секунду равными 0.356 м и пересчитаем значения  $c_4$  с помощью алгоритма численного решения.

Отредактированные данные были аппроксимированы и представлены на рисунке 3:

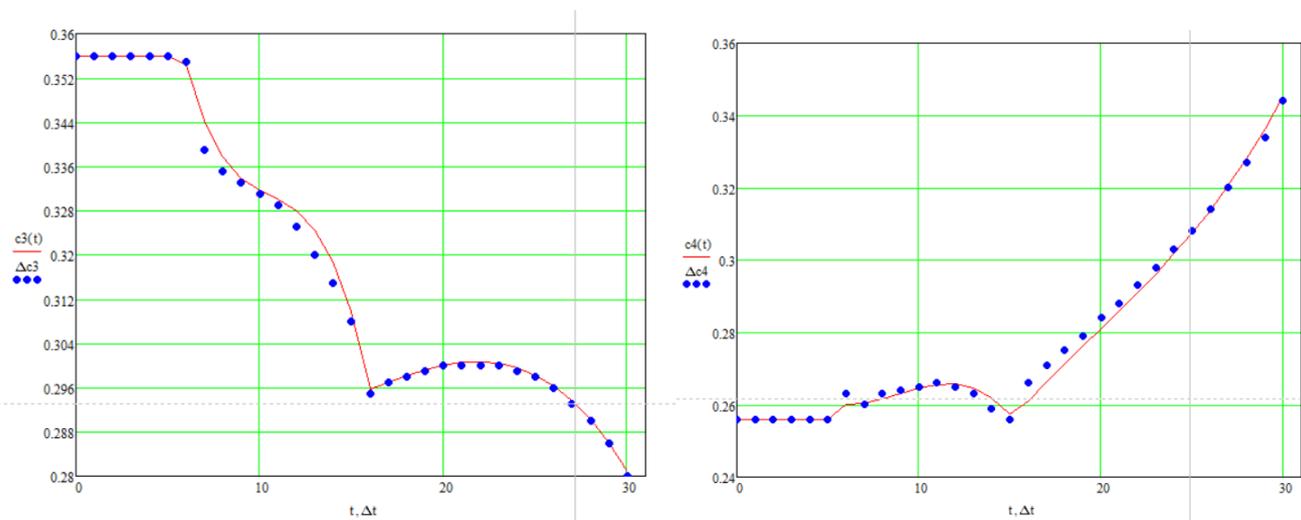


Рис.3. Аппроксимированные зависимости  $c_3, c_4$

$$c_3(t) = \begin{cases} 0.356, & \text{если } 0 \leq t \leq 5 \\ 0.544 - 0.057 \cdot t + 5.21 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 1.634 \cdot 10^{-4} \cdot t^3, & \text{если } 5 < t < 16 \\ 0.312 - 6.135 \cdot 10^{-3} \cdot t + 4.909 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 1.07 \cdot 10^{-5} \cdot t^3, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (8)$$

$$c_4(t) = \begin{cases} 0.256, & \text{если } 0 \leq t \leq 5 \\ (0.297 - 0.013 \cdot t + 1.654 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 6.274 \cdot 10^{-5} \cdot t^3) - 0.005, & \text{если } 5 < t < 16 \\ (0.099 + 0.02 \cdot t - 7.803 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 1.339 \cdot 10^{-5} \cdot t^3) - 0.013, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (9)$$

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0.314, & \text{если } 0 \leq t \leq 15 \\ 1.5\pi, & \text{если } 16 < t < 30 \end{cases} \quad (10)$$

$$c_2(t) = \begin{cases} 0.356, & \text{если } 0 \leq t \leq 5 \\ -0.01(t-5) + 0.356, & \text{если } 5 < t < 16 \\ 0.256, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (11)$$

### Верификация

Зависимости (8-11) были подставлены в вектор сдвига 6-ой системы координат (1). Результаты подстановки показывают, что искомые выражения обеспечивают движение манипулятора по заданной траектории (3-5) и представлены на рисунке 4.

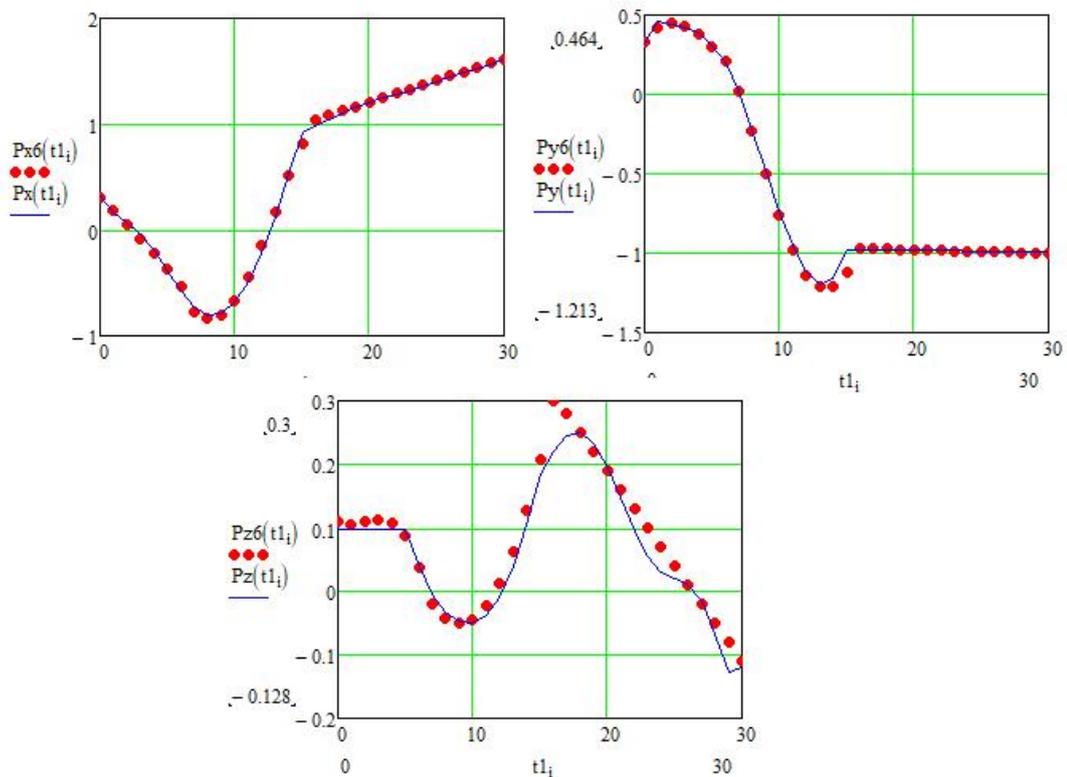


Рис.4. Графики заданной траектории (3-5) и движения 6-ой СК манипулятора.

### Оптимизация траектории

Полученные зависимости (8-11) обеспечивают движение по заданной траектории, но также требуют корректировки с учетом реальной скорости движения силовых приводов.

Согласно технической документации, максимальная угловая скорость мотор – редуктора составляет 6 град/сек, максимальная скорость линейного привода под нагрузкой составляет 4.5 мм/сек. Скорректированные зависимости с учётом максимальной скорости движения силовых приводов имеют следующий вид:

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0,1046 \cdot t, & \text{если } 0 \leq t < 451,5 \cdot \pi \\ 0 \leq t < 451,5 \cdot \pi, & \text{если } 45 \leq t \leq 64,524 \end{cases} \quad (12)$$

$$c_2(t) = \begin{cases} 0,356, & \text{если } 0 \leq t < 15 \\ 0,003 \cdot t + 0,406, & \text{если } 15 \leq t \leq 45 \\ 0,256, & \text{если } 45 < t \leq 64,524 \end{cases} \quad (13)$$

$$c_3(t) = \begin{cases} 0,356, & \text{если } 0 \leq t \leq 5 \\ 0,544 - 0,057 \cdot t + 5,21 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 1,634 \cdot 10^{-4} \cdot t^3, & \text{если } 5 < t < 16 \\ 0,312 - 6,135 \cdot 10^{-3} \cdot t + 4,909 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 1,07 \cdot 10^{-5} \cdot t^3, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (14)$$

$$c_4(t) = \begin{cases} 0,256, & \text{если } 0 \leq t \leq 5 \\ (0,297 - 0,013 \cdot t + 1,654 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 6,274 \cdot 10^{-5} \cdot t^3) - 0,005, & \text{если } 5 < t < 16 \\ (0,099 + 0,02 \cdot t - 7,803 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 + 1,339 \cdot 10^{-5} \cdot t^3) - 0,013, & \text{если } 16 \leq t \leq 30 \end{cases} \quad (15)$$

### Заключение

При решении обратной задачи кинематики были получены оптимальные с точки зрения быстродействия соотношения (12-15), обеспечивающие движение манипулятора по заранее заданной, требуемой траектории (3-5) с учетом пространственных ограничений.

Таким образом, использование метода на основе матрицы Якоби для решения обратной задачи кинематики позволяет оптимизировать движение манипулятора, обеспечивая его эффективное и быстрое раскладывание и уборку. Этот подход имеет важное практическое значение для создания автоматических автомобильных манипуляторов, способных облегчить перемещение инвалидов кресел и обеспечить водителям-инвалидам независимость и свободу перемещения.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карабанов Г.С., Селюков А.Н., Крахмалев О.Н., Демонстрация решения обратной задачи кинематики на примере 6-DOF робота. [Электронный ресурс]// XXXIV Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения. Сборник трудов конференции. Москва, 2022 Издательство: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (Москва) Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49872804>

2. Круглов С.П., Иванченко С.А., Ковыршин С.В. Решение прямой расширенной задачи кинематики для манипулятора инвалидного кресла [Электронный ресурс] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университе-

та. электротехника, информационные технологии, системы управления: электрон. науч.журн. №.41.2022 –2022.–. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48707454>., г.Пермь

3. Голомаздин П.И., Дмитроченко О.Н., Программная реализация решения обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора [Электронный ресурс]// Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении: электрон.науч.журнал. № 3(17) 2022 —2022— Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49478231>, г.Брянск

4. О.С. Коровин., Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью [Электронный ресурс]// Политехнический молодежный журнал: электрон.науч.журн. № 12(77) 2022 —2022— Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50172603> , г.Москва

5. Кондрашов Д.А., Решение обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора с использованием метода Ньютона-Рафсона [Электронный ресурс]// Научный потенциал молодежи и технический прогресс научный потенциал молодежи и технический прогресс Санкт-Петербург, 21 мая 2021 года. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46290599>, г.Санкт-Петербург.

6. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкредидзе, Е. Ф. Мищенко., Математическая теория оптимальных процессов. г. Москва Главная редакция физико-математической литературы, 1983 г.

7. И. В. Гребенникова, Методы оптимизации (учебное пособие). г. Екатеринбург, 2017г.

8. Ю. Н. Челноков, Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов [Электронный ресурс]// Известия российской академии наук. механика твердого тела, : электрон.науч.журн. № 1 2013., Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18879217>, г.Саратов

9. С.А. Братчиков, Е.А. Абрамова, Ю.В. Федосов, решение обратной задачи кинематики манипулятора [Электронный ресурс] // Вестник томского государственного университета. управление, вычислительная техника и информатика, : электрон.науч.журн. №56 , 2021г., Режим доступа : <https://elibrary.ru/item.asp?id=47188960>

## REFERENCES

1. Karabanov G.S., Selyukov A.N., Krakhmalev O.N., Demonstration of the solution of the inverse kinematics problem on the example of a 6-DOF robot. [Electronic resource] // XXXIV International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Modern Problems of Machine Learning. Proceedings. Moscow, 2022 Publishing house: Federal State Budgetary Scientific Inst. A.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences (Moscow) Mode of access: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49872804>

2. Kruglov S.P., Ivanchenko S.A., Kovyryshin S.V. The solution of the direct extended problem of kinematics for the wheelchair manipulator [Electronic resource] // Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. electrical engineering, information technology, control systems: electronic scientific journal No.41.2022 -2022. Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=48707454>., Perm

3. P. I. Golomazdin and O. N. Dmitrichenko, Software Implementation of the Solution of Inverse Problem of Six-Link Manipulator Kinematics [Electronic resource]// Automation and Modelling in Design and Control: Electronic scientific journal. No. 3(17) 2022-2022- Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49478231>, Bryansk.

4. O. S. Korovin, A review of methods for solving the inverse problem of kinematics for mu-manipulator with redundancy [Electronic resource]// Polytechnic youth journal: electronic scientific journal № 12(77) 2022 -2022- Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50172603> , Moscow

5. Kondrashov D.A., The solution of the inverse problem of the kinematics of a six-branch machinator using the Newton-Raphson method [Electronic resource] // Scientific Potential of Youth and Technical Progress Scientific Potential of Youth and Technical Progress St. Petersburg, May 21, 2021. Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=46290599>, Saint-Petersburg.

6. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The mathematical theory of optimum processes. Moscow Main Editorial Office of Physical and Mathematical Literature, 1983.

7. I. V. Grebennikova, Optimization methods (textbook). Ekaterinburg, 2017.

8. Y. N. Chelnokov, Biquaternion solution of kinematic problem of solid body motion control and its application to the solution of inverse problems of kinematics of robot-manipulators [Electronic resource]// Proceedings of the Russian Academy of Sciences. mechanics of solids, : electronic scientific journal No.1 2013., Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=18879217>, Saratov

9. S.A. Bratchikov, E.A. Abramova, Y.V. Fedosov, solving the inverse problem of manipulator kinematics [Electronic resource] // Bulletin of Tomsk State University. management, computer science and informatics, : electronic scientific journal, №56 , 2021, access mode : <https://elibrary.ru/item.asp?id=47188960>

#### **Информация об авторах**

*Круглов Сергей Петрович* (Иркутск, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов», Иркутский государственный университет путей сообщения, (664009, г. Иркутск, ул. Советская, д.176/205, кв.9, e-mail: [Kruglov\\_SP@irgups.ru](mailto:Kruglov_SP@irgups.ru)).

*Иванченко Степан Александрович* (Иркутск, Россия) – аспирант кафедры «Автоматизация производственных процессов», Иркутский государственный университет путей сообщения , г. Иркутск, (664056, Иркутская обл. г. Иркутск, ул. Академическая 38, д.38, кв.11, e-mail: [stefanfobos@gmail.com](mailto:stefanfobos@gmail.com)).

#### **Information about the authors**

*Kruglov Sergey Petrovich* (Irkutsk, Russia) – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automation of Production Processes, Irkutsk State Transport University, (664009, Irkutsk, Sovetskaya st., 176/205, apt. 9, e-mail: [Kruglov\\_SP@irgups.ru](mailto:Kruglov_SP@irgups.ru)).

*Ivanchenko Stepan Aleksandrovich* (Irkutsk, Russia) – post-graduate student of the department “Automation of production processes”, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, (664056, Irkutsk region, Irkutsk, Akademicheskaya st. 11, e-mail: [stefanfobos@gmail.com](mailto:stefanfobos@gmail.com)).