

Д. В. Немитовская, И. И. Тихий

Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

РАЗРАБОТКА РЕКОМЕНДАЦИЙ ПО РАСЧЕТУ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ РАМЫ

Аннотация. В статье рассмотрены способы расчёта перемещений в статически определимых системах на примере расчётной схемы плоской рамы. Рассмотренные способы основаны на применении частного случая интегральной формулы Максвелла – Мора, и предполагают перемножение единичных и грузовых эпюр изгибающих моментов, возникающих в системе под действием приложенных нагрузок. Проведено сравнение результатов перемножения эпюр по трём правилам: Верещагина, Симпсона и перемножения трапеций. При этом, правило Верещагина реализовывалось с помощью типовых форм эпюр, принципа суперпозиции и сложения (вычитания) типовых эпюр. Результаты перемножения разными способами сравнивались по критерию точности и достоверности, а также количеству выполняемых операций. На основе результатов сравнения сформулированы рекомендации по выбору оптимальных способов вычисления перемещений в статически определимых плоских рамах.

Ключевые слова: надёжность, прочность жёсткость, устойчивость линейные и угловые перемещения, силовые воздействия, изгибающие моменты, единичные эпюры, грузовые эпюры, правило Верещагина, формула Симпсона, формула перемножения трапеций.

D. V. Nemitovskaya, I. I. Tihij

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

DEVELOPMENT OF AN OPTIMAL METHOD FOR CALCULATING DISPLACEMENTS IN STATICALLY DEFINABLE SYSTEMS USING THE EXAMPLE OF A FRAME

Abstract. The article discusses methods for calculating displacements in statically definable systems using the example of a design scheme of a flat frame. The considered methods are based on the application of a special case of the Maxwell-Mohr integral formula, and assume multiplication of unit and load diagrams of bending moments arising in the system under the action of applied loads. The results of the multiplication of plots according to three rules are compared: Vereshchagin, Simpson and trapezoid multiplication. At the same time, Vereshchagin's rule was implemented using standard forms of plots, the principle of superposition and addition (subtraction) of standard plots. The results of multiplication were compared in different ways according to the criterion of accuracy and reliability, as well as the number of operations performed. Based on the results of the comparison, recommendations are formulated on the choice of optimal methods for calculating displacements in statically definable.

Keywords: reliability, strength, rigidity, stability, linear and angular displacements, force effects, bending moments, single graphs, cargo graphs, Vereshchagin's rule, Simpson's formula, trapezoid multiplication formula.

Введение

Строительные конструкции получили широкое распространение в промышленности, в гражданском строительстве и других областях. Одним из основных требований, предъявляемых к конструкции, является надёжность. Общее свойство надёжности для строительных конструкций делится на частные свойства: прочность, жесткость и устойчивость [1, 2]. Устойчивость конструкции определяется тем, что отдельные элементы или вся конструкция в целом не меняют состояние равновесия под расчетным нагружением. Немаловажным для конструкции свойством является ее экономичность, в связи с этим возрастают требования к повышению точности и достоверности результатов её расчета на надёжность и экономичность.

Обеспечение надёжности осуществляется двумя методами: расчетным и экспериментальным. Расчетные методы основываются на вычислении усилий и перемещений, как характеристик прочности, жесткости и устойчивости [3-5]. В данной работе мы остановимся только на методах расчета перемещений.

Известно, что перемещения могут быть вызваны силовыми, температурными и кинематическими воздействиями [2], которые приводят к деформации сооружения, вследствие чего его сечения изменяют свои положения, которые описываются линейными и угловыми перемещениями. Суммарные перемещения всех видов воздействия вычисляются по формуле Максвелла-Мора. В данной работе ограничимся только силовыми воздействиями на плоские рамы. В этом случае интегральная формула Максвелла-Мора упрощается до интеграла Мора, который имеет вид [6]:

$$\Delta_i^K = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_P \cdot \overline{M}_i}{EJ} dx. \quad (1)$$

В общем случае, вычисление интеграла Мора [1] может осуществляться с помощью:

- правила Верещагина, которое реализуется в практических расчётах путём:
 - применения типовых фигур;
 - применения принципа суперпозиции и, затем типовых фигур;
 - геометрического разбиения перемножаемых эпюр на типовые;
- формулы Симпсона;
- формулы перемножения трапеций.

Рассмотрим применение этих способов на примере расчёта плоской статически определимой рамы, приведенной на рисунке 1.

Задана рама с размерами: $a = 2,2\text{м}$, $b = 3,4\text{м}$, нагрузками: $P = 20\text{ кН}$, $q = 4\text{ кН/м}$, $J_p = 2J$, $J_c = 2J$ (рис. 1).

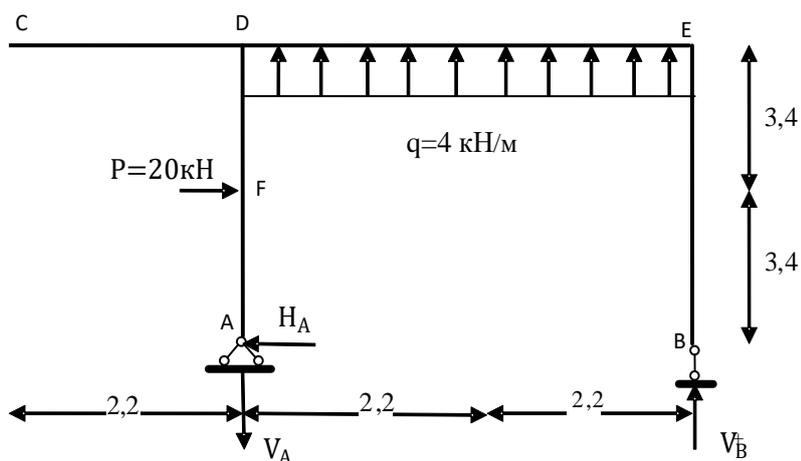


Рис. 1. Заданная схема

Определить вертикальное перемещение точки С.

Решение:

1. Определение опорных реакций (в кН):

$$\sum X = P - H_A = 0 \Rightarrow H_A = 20$$

$$\sum M_A = P \cdot b - q \cdot 2a \cdot a + V_B \cdot 2a = 0. \Rightarrow V_B = \frac{4 \cdot 4,4 \cdot 2,2 - 20 \cdot 3,4}{2 \cdot 2,2} = -6,6545$$

$$\sum M_B = q \cdot 2a \cdot a + P \cdot b - V_A \cdot 2a = 0. \Rightarrow V_A = \frac{4 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 20 \cdot 3,4}{2 \cdot 2,2} = 24,2545$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0. \Rightarrow V_A + V_B - q \cdot 2a = 24,2545 - 6,6545 - 17,6 = 0$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов M_p (в кН·м, рис 2).

$$M_A = M_{B-E} = M_{C-D} = 0;$$

$$M_F^{CH} = H_A \cdot b = 20 \cdot 3,4 = 68;$$

$$M_D^{CH} = H_A \cdot 2b - P \cdot b = 20 \cdot 2 \cdot 3,4 - 20 \cdot 3,4 = 68;$$

$$M_D^{Cnp} = V_B \cdot 2a + q \cdot 2a \cdot a = 29,28 + 38,72 = 68;$$

$$M_K = V_B \cdot a + q \cdot a \cdot a/2 = 14,64 + 9,68 = 24,32$$

Проверка: $\sum M_D = 68 - 68 = 0$.

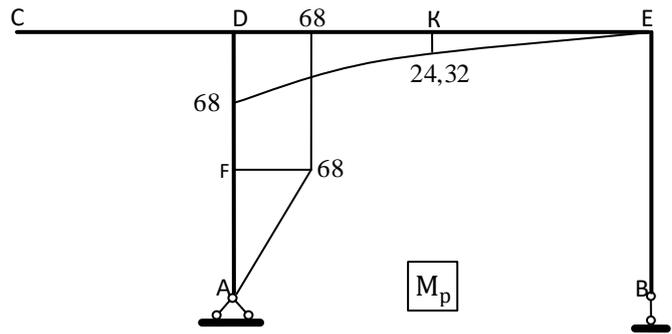


Рис. 2. Грузовая эпюра M_p

3. Построение единичной эпюры \overline{M}_1 (в м) от вертикального воздействия $P = 1$. (рис. 3.).

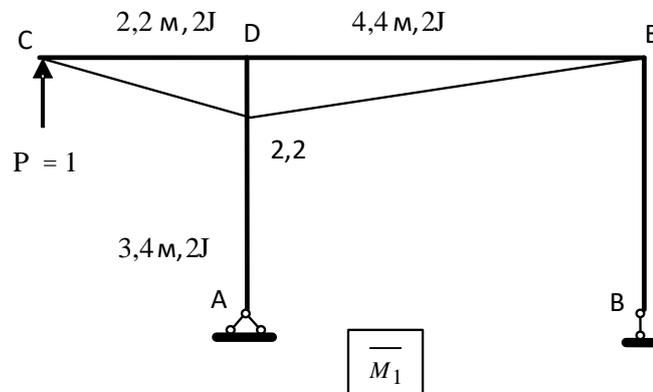


Рис. 3. Единичная эпюра \overline{M}_1

4. Вычисление вертикального перемещения точки С осуществляется путём перемножения грузовой и единичной эпюры на участке D-E.

Осуществим это перемножение различными способами.

1) Вычисление по правилу Верещагина:

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_p \cdot \overline{M}_1}{EJ} \cdot dx = \pm \frac{A_{M_p} \cdot y_{M_1}}{EJ}. \quad (2)$$

Эпюра от воздействия сосредоточенной силы представлена на рис. 4.

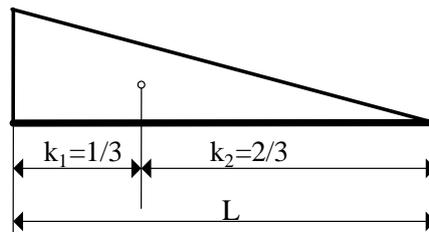


Рис. 4. Эпюра от воздействия сосредоточенной силы

Формула для вычисления площади эпюры:

$$A_{M_j} = \frac{1}{2} h \cdot l. \quad (3)$$

Эпюра M от воздействия распределенной нагрузки представлена на рис. 5.

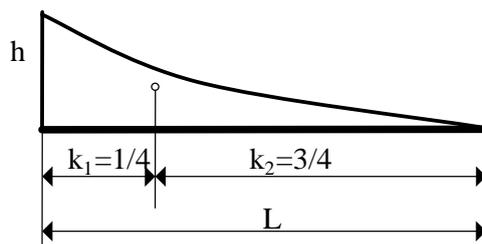


Рис. 5. Эпюра от воздействия распределенной нагрузки

Формула для вычисления площади эпюры:

$$A_{M_j} = \frac{1}{3} h \cdot l. \quad (4)$$

Результат расчёта вертикального перемещения:

$$\Delta_B = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 68 \cdot 4,4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,2 = \frac{82,28}{EJ} \text{ (м)}.$$

2) Вычисление по формуле Симпсона:

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{6EJ} \cdot (M_i^H \cdot M_j^H + 4 \cdot M_i^{cp} \cdot M_j^{cp} + M_i^K \cdot M_j^K); \quad (5)$$

$$\Delta_B = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{4,4}{6} \cdot (68 \cdot 2,2 + 4 \cdot 24,32 \cdot 1,1) = \frac{94,0896}{EJ} \text{ (м)}.$$

Из результатов расчёта следует, что значения вертикальных перемещений, найденных по правилу Верещагина и по формуле Симпсона, не совпадают, расхождение результатов $\delta = 12,6\%$, что превышает допустимые 5% .

Причина этого отличия заключается в том, что по правилу Верещагина формула для вычисления площади эпюры (4) применяется в том случае, когда на систему действует только распределенная нагрузка q . В заданном же примере на рассматриваемый участок действует и сосредоточенная сила V_B , и распределенная нагрузка q .

Следовательно, когда на конструкцию действует система сил, для нахождения точных значений перемещения следует разбить задачу на этапы.

Проверим это предположение с помощью расчета, основанного на принципе независимости действия сил [7] (принцип суперпозиции) и, тем самым, независимости перемещений. Для этого рассмотрим отдельно действие на балку сосредоточенной силы V_B , затем распределенной нагрузки q , найдем вертикальное перемещение.

3) Принцип суперпозиции.

Рассматривается действие на участок D-E только сосредоточенной силы $V_B = 6,65 \text{ кН}$ (рис. 6.)

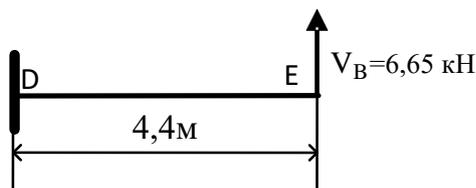


Рис. 6. Схема действия V_B .

Построение грузовой эпюры M_p (рис. 7. в кН·м) от действия силы V_B по методу сечений.

Изгибающий момент M :

$$M = -V_B \cdot z;$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(4,4\text{м}) = -6,65 \cdot 4,4 = -29,26 \text{ кНм.}$$

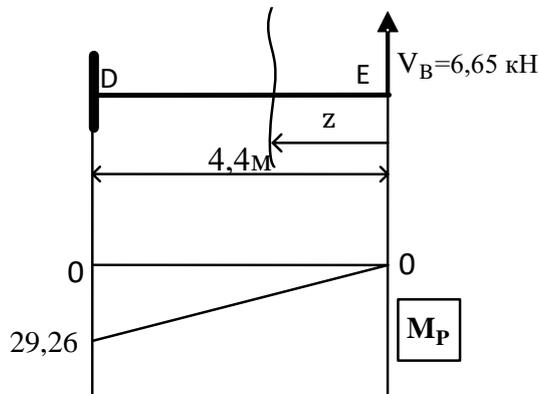


Рис. 7. Грузовая эпюра M_p

Определение вертикального перемещения по правилу Верещагина:

$$\Delta_{B1} = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 29,26 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,2 = \frac{47,2061}{EJ} \text{ (м)}.$$

Далее рассматривается действие на участок D-E только распределенной нагрузки $q = 4 \text{ кН/м}$ (рис. 8.):

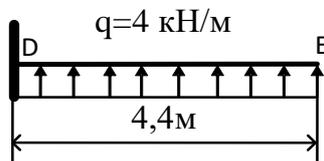


Рис. 8. Схема действия q

Построение грузовой эпюры M_p (рис. 9. в кН·м) от действия распределенной нагрузки q по методу сечений.

Изгибающий момент M :

$$M = -0,5qz^2;$$

Проверка на наличие экстремума:

$$\left. \frac{dM_x}{dz} \right|_{z=z_0} = 0, \quad \frac{dM_x}{dz} = -qz;$$

$$-qz_0 = 0;$$

$$z_0 = 0 \text{ м.}$$

– экстремум в пределах участка DE.

Расчет изгибающего момента:

$$M(0) = 0;$$

$$M(4,4\text{м}) = -0,5 \cdot 4 \cdot 4,4^2 = -38,72 \text{ кНм.}$$

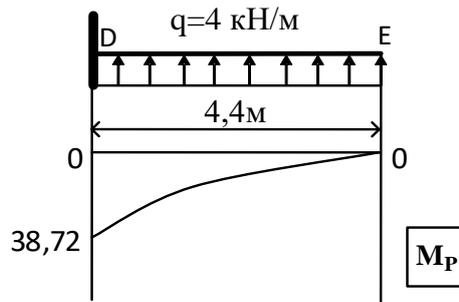


Рис. 9. Грузовая эпюра M_p

Определение вертикального перемещения по правилу Верещагина:

$$\Delta_{B2} = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 38,72 \cdot 4,4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,2 = \frac{46,8512}{EJ} \text{ (м)}.$$

Суммарное вертикальное перемещение:

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} = \frac{47,2061}{EJ} + \frac{46,8512}{EJ} = \frac{94,0573}{EJ} \text{ (м)}.$$

Сравним полученные результаты, расхождение составляет $\delta = 0,03\%$, что находится в пределах допуска 5%. Таким образом, предположение подтвердилось.

4) Геометрическое разбиение перемножаемых эпюр на типовые.

Если эпюра M_p имеет сложный вид, то её можно разбить на простые фигуры, для которых легко определить площадь и положение центра тяжести. При этом каждую из площадей умножают на ординату единичной эпюры под центром тяжести соответствующей площади [8,9].

На рис. 10. грузовую эпюру M_p на участке D-E, которая имеет сложную геометрическую форму, разобьем на прямоугольный треугольник и сегмент параболы. Найдем вертикальное перемещение.

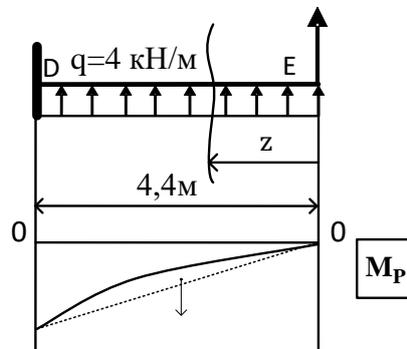


Рис. 10. Грузовая эпюра M_p

Формула для вычисления площади эпюры сегмента параболы:

$$A_{M_j} = \frac{q \cdot l^3}{12}. \quad (6)$$

Определение вертикального перемещения по правилу Верещагина:

$$\Delta_B = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 68 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,2 - \frac{4 \cdot 4,4^3}{12} \cdot 0,5 \cdot 2,2 = \frac{94,0896}{EJ} \text{ (м)}.$$

Таким образом, результаты перемножения по правилу Верещагина с применением способа разбиения эпюр, имеющих сложную геометрическую форму, на простые фигуры и по методу Симпсона идентичны. Также они совпадают с результатами перемножения по правилу Верещагина с применением принципа суперпозиции.

Применение правила Верещагина с использованием типовых фигур требует предварительного анализа схемы нагружения рассматриваемого участка, чтобы убедиться в том, что на участок действует только одна распределённая нагрузка. Это поможет избежать ошибок в вычислениях.

Дополнительно рассмотрим вопрос, связанный с нахождением перемещений при перемножении «перекрученных» трапеций, сначала по правилу Верещагина, затем по формуле перемножения трапеций.

Формула перемножения трапеций имеет вид:

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EJ} \cdot dx = \frac{1}{6EJ} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + b \cdot c + a \cdot d); \quad (7)$$

Рассмотрим пример перемножения эпюр, изображенных на рисунках 11 и 12:

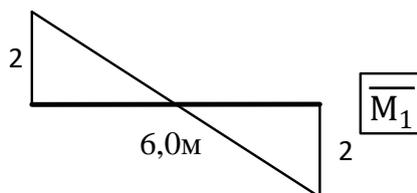


Рис. 11. Единичная эпюра \overline{M}_1

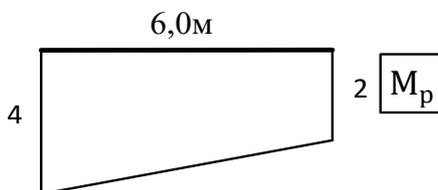


Рис. 12. Грузовая эпюра M_p

Расчёт перемещения по формуле перемножения трапеций:

$$\Delta = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = -\frac{4}{EJ} (\text{м}).$$

Расчёт перемещения по правилу Верещагина:

$$\Delta = -\frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{EJ} (\text{м}).$$

Как видно, результаты расчётов по разным правилам совпадают.

Рассмотрим второй пример перемножения эпюр, изображенных на рисунках 13 и 14:

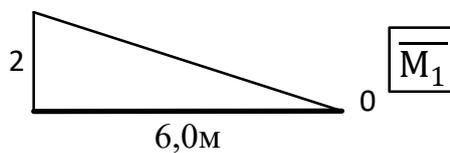


Рис. 13. Единичная эпюра \overline{M}_1

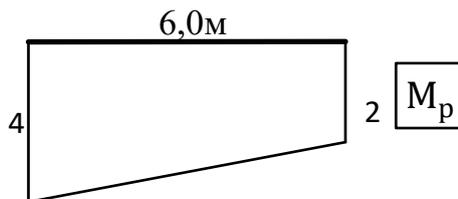


Рис. 14. Грузовая эпюра M_p

Расчёт перемещения по формуле перемножения трапеций:

$$\Delta = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 4 + 0 - 2 \cdot 2 - 0) = -\frac{20}{EJ} (\text{м}).$$

Расчёт перемещения по правилу Верещагина:

$$\Delta = -\frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{20}{EJ} (\text{м}).$$

Как видно, перемещения, вычисленные по правилу Верещагина и по формуле перемножения трапеций, в обоих примерах совпадают. Однако применение правила Верещагина требует большего числа вычислительных и логических операций.

Из этого следует, что «перекрученные» трапеции и треугольники проще вычислять по формуле перемножения трапеций.

Заключение

Проведенные исследования показали, что при расчёте перемещений в статически определимых рамах можно использовать различные способы перемножения эпюр из вышеперечисленных при обязательном учёте ограничений на их применение.

Так, при использовании типовых фигур для реализации правила Верещагина необходимо использовать принцип суперпозиции для исключения ошибок вычислений. Кроме того, правило Верещагина основано на выполнении ряда логических операций, предваряющих процесс непосредственного вычисления и связанных с необходимостью определения типа фигуры и ординаты под центром тяжести криволинейной фигуры. Это обстоятельство приводит к усложнению вычислений.

В отличие от правила Верещагина, формулы перемножения трапеций и Симпсона проще формализовать, для чего достаточно указать соответствие элементов формулы соответствующим значениям перемножаемых эпюр. Кроме того, эти формулы универсальны, так как имеют одинаковый вид для различных геометрических фигур, будь то трапеции или треугольники, выпуклые или вогнутые параболические фигуры.

Поэтому, по критерию простоты и надёжности вычислений рекомендуется:

- при перемножении треугольников и прямоугольников использовать правило Верещагина,
- при перемножении параболических фигур на любые прямолинейные использовать формулу Симпсона,
- при перемножении прямоугольных фигур различного вида – соответствующую формулу перемножения трапеций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихий И.И. Основы строительной механики/ И.И. Тихий, Л.А. Адамова. – Иркутск: ИрГУПС, 2019. – 64 с.
2. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах/ Н.Н. Анохин. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
3. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов/ Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка, В.Г. Попков, Э.С. Уманский. – Киев: Высш. Шк., 1986. – 775 с.
4. Беляев Н.М. Сопротивление материалов/ Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов/ В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
6. Ицкович Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов/ Г.М. Ицкович, Л.С. Минин, А.И. Винокуров. – М.: Высш. Шк., 1999. – 592 с.
7. Межецкий Г.Д. Сопротивление материалов/ Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник. – М.: Дашков и К, 2016. – 432 с.
8. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

9. Степин П.А. Сопrotивление материалов/ Степин П.А. – СПб.: Изд-во «Лань», 2012. – 320 с.

REFERENCES

1. Tihij I.I. Osnovy stroitel'noj mekhaniki [Fundamentals of construction mechanics]/ I.I. Tihij, L.A. Adamova. – Irkutsk: Ir-GUPS, 2019. – 64 s.
2. Anohin N.N. Stroitel'naya mekhanika v primerah i zadachah [Construction mechanics in examples and tasks]/ N.N. Anohin. – M.: Izd-vo ASV, 1999. – 335s.
3. Pisarenko G.S. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]/ G.S. Pisarenko, V.A. Agarev, A.L. Kvitka, V.G. Popkov, E.S. Umanskij. – Kiev: Vyssh. SHk., 1986. – 775 s.
4. Belyaev N.M. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]/ N.M. Belyaev. – M.: Nauka. 1976. – 608 s.
5. Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]/ V.I. Feodos'ev. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1999. – 592 s.
6. Ickovich G.M. Rukovodstvo k resheniyu zadach po soprotivleniyu materialov [A guide to solving problems on the resistance of materials]/ G.M. Ickovich, L.S. Minin, A.I. Vinokurov. – M.: Vyssh. SHk., 1999. – 592 s.
7. Mezheckij G.D. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]/ G.D. Mezheckij, G.G. Zagrebin, N.N. Reshetnik. – M.: Dashkov i K, 2016. – 432 s.
8. Pisarenko G.S. Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Handbook of resistance of materials]/ G.S. Pisarenko, A.P. Yakovlev, V.V. Matveev. – Kiev: Nauk. dumka, 1988. – 736 s.
9. Stepin P.A. Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]/ Stepin P.A. – SPb.: Izd-vo «Lan'», 2012. – 320 s.

Информация об авторах

Немитовская Дарья Владимировна – обучающаяся, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: DVNemito@yandex.ru

Тихий Иван Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Физика, механика и приборостроение», Иркутский государственный университет путей сообщения г. Иркутск, e-mail: tiviv@list.ru

Information about the authors

Nemitovskaya Darya V. – student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: DVNemito@yandex.ru

Tikhly Ivan I. – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department «Physics, mechanics and instrumentation», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: tiviv@list.ru