

## Исследование угловой скорости вращения маятника на вращающемся валу механической системы

А. И. Артюнин<sup>1</sup>✉, С. В. Барсуков<sup>1</sup>, О. Ю. Суменков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Научно-технологический университет «Сириус», г. Сочи, Российская Федерация

✉ artyunin\_ai@irgups.ru

### Резюме

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы. Суть этого эффекта заключается в том, что при определенном соотношении между моментом трения в опоре маятника, установленного с возможностью свободного вращения на валу ротора двигателя механической системы, и его массой или длиной имеет место такой режим движения, когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость (частота вращения) маятника совпадает с одной из собственных частот механической системы. Исследования проводились на модели с двумя степенями свободы и маятником, установленным с возможностью свободного вращения на валу этой механической системы. Для данной модели с маятником получены нелинейные дифференциальные уравнения, неразрешенные относительно старших производных. В результате численного интегрирования этих уравнений построены законы вращения маятника при разных коэффициентах трения в его опоре, в том числе при «застревании» маятника на собственных частотах модели. Путем обоснованных допущений выведено обособленное дифференциальное уравнение движения маятника на вращающемся валу модели. Из этого уравнения наглядно можно увидеть, что на вращение маятника на валу механической системы и, соответственно, на возникновение эффекта «застревания» влияет не только трение в опоре маятника, но и собственная частота колебаний и демпфирование механической системы. Расчетные кривые законов разгона маятника при интегрировании системы уравнений и обособленного уравнения показали хорошее совпадение, что свидетельствует о достоверности полученных результатов. Проведено исследование влияния демпфирования на возможность возникновения эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу.

### Ключевые слова

маятник, угловая скорость, вращающийся вал, механическая система, эффект «застревания», демпфирование

### Для цитирования

Артюнин А. И. Исследование угловой скорости вращения маятника на вращающемся валу механической системы / А. И. Артюнин, С. В. Барсуков, О. Ю. Суменков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2021. – № 4 (72). – С. 21–28. – DOI: 10.26731/1813-9108.2021.4(72).21-28

### Информация о статье

поступила в редакцию: 24.11.2021, поступила после рецензирования: 30.11.2021, принята к публикации: 02.12.2021

## Research of the angular velocity of rotation of the pendulum on the rotating shaft of the mechanical system

A. I. Artyunin<sup>1</sup>✉, S. V. Barsukov<sup>1</sup>, O. Yu. Sumenkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

<sup>2</sup> The Sirius University of Science and Technology, Sochi, the Russian Federation

✉ artyunin\_ai@irgups.ru

### Abstract

One of the most undesirable phenomena that occur when processing non-rigid parts is the occurrence of self-oscillation of the pendulum on the rotating shaft of a mechanical system. This work deals with further research of the effect of «sticking» of a pendulum on the rotating shaft of a mechanical system. Essentially, with a certain ratio between the friction torque in the support of the pendulum mounted with the possibility of free rotation on the mechanical system rotor shaft, and its mass and length there is such a mode of motion when the rotor spins with a given angular velocity, and the angular velocity (rotation frequency) coincides with one of the natural frequencies of the mechanical system. Researches were conducted in the model with two degrees of freedom and a pendulum mounted with the possibility of free rotation on the shaft of its mechanical system. Nonlinear differential equations, not solved with respect to a higher derivative, were obtained for this model with a pendulum. As a result of a numerical integration of these equations, the laws of the pendulum rotation with different friction coefficients in its support are formulated, including the case when the pendulum “sticks” on the natural frequencies of the model. By means of substantiated assumptions, a separate differential equation of the pendulum motion on the rotating shaft of the model was derived. From this equation one can clearly see that the rotation of the pendulum

on the shaft and, respectively, the effect of «sticking» are influenced not only by friction in the pendulum's support, but also by the natural frequency of oscillations and damping of the mechanical system. Calculated curves of the pendulum's acceleration laws during the integration of the system of equations showed close coincidence, which is indicative of the veracity of the results obtained. A research of the influence of damping on the likelihood of the effect of “sticking” of the pendulum on the rotating shaft was carried out.

### Keywords

pendulum, angular velocity, rotating shaft, mechanical system, sticking effect, damping

### For citation

Artyunin A. I., Barsukov S. V., Sumenkov O. Yu. Issledovanie uglovoj skorosti vrashheniya mayatnika na vrashhayushhemsya valu mekhanicheskoy sistemy [Research of the angular velocity of rotation of the pendulum on the rotating shaft of the mechanical system]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2021, No. 4 (72), pp. 21–28. – DOI: 10.26731/1813-9108.2021.4(72).21-28

### Article info

Received: 24.11.2021, Revised: 30.11.2021, Accepted: 02.12.2021

### Введение

Данная работа является продолжением цикла работ по изучению эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы. Суть этого эффекта заключается в том, что при определенном соотношении между моментами трения в опоре маятника, установленно с возможностью свободного вращения на валу ротора механической системы, и его массой или длиной имеет место такой режим движения, когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость маятника (частота вращения) совпадает с одной из резонансных частот механической системы [1–4].

Маятник является уникальным объектом исследований и практического применения, а также основным элементом механических часов, маятник Фуко используется в эксперименте по доказательству вращения Земли. Маятник Фроуда иллюстрирует возможность появления автоколебаний. Маятниковые детали служат гасителями колебаний, маятник применяется при геофизических изысканиях. С помощью маятников Максвелла и Обербека демонстрируются законы механики. Это далеко не полный перечень применения маятников.

Колебания маятника с неподвижной точкой подвеса под действием силы тяжести изучали еще основоположники механики Г. Галилей [5], И. Ньютон [6], Х. Гюйгенс [7]. Исследования движения маятника с малыми углами отклонения положили начало линейной теории механических колебаний. Другое направление исследований возникло, когда стали изучать движение маятника с колеблющейся точкой подвеса [8, 9]. Основополагающими в этой области исследований являются

работы академиков Н.Н. Боголюбова [10, 11] и П.Л. Капицы [12, 13]. Оригинальные исследования маятниковых систем, открывших их новые свойства, проведены известными учеными В.Н. Челомеем [14] и К.М. Рагульским [15]. Обширная библиография в этой области приведена в работе [16]. В настоящее время также активно проводятся исследования динамики маятниковых систем с колеблющейся точкой подвеса, в том числе с применением современных компьютерных программ аналитических вычислений [17–19].

В свое время академик П.Л. Капица писал, что ни одной из механических систем не было уделено столько внимания и теоретического изучения как всем разновидностям маятника. Казалось бы, что за 300 лет, прошедших со времен Галилея, этот вопрос должен быть исчерпан если, что осталось для изучения, то это должно было носить характер дошлифовки ранее полученных результатов» [13]. Это академик написал, когда обнаружил новые возможности маятника с вибрирующей точкой подвеса. Однако маятник и в наше время обнаружил свои новые свойства, а именно: при проведении экспериментальных исследований возможности автоматической балансировки роторов с помощью маятников был обнаружен эффект «застревания» маятника на резонансных частотах механической системы. Однако, несмотря на результаты экспериментальных исследований и компьютерного моделирования качественная картина этого явления до конца еще не ясна. Не исследовано, например, влияние параметров механической системы на условия возникновения и существование нового явления.

Целью настоящей работы является изучение угловой скорости вращения маятника на вращающемся валу на простой модели механической системы, вывод формулы закона изменения угловой скорости маятника и оценка влияния демпфирования механической системы на закон изменения угловой скорости маятника.

### Выбор и описание движения модели механической системы с маятником на вращающемся валу

Исследуемая модель (рис. 1) представляет собой корпус твердого тела симметричной кубической формы, который закреплен на неподвижном основании с помощью симметрично расположенных четырех вертикальных и четырех горизонтальных невесомых упругих опор.

В корпусе установлен уравновешенный ротор с валом. На валу ротора установлен маятник с возможностью вращения относительно вала. Ось вращения ротора проходит через центр масс корпуса (точка  $O_1$ ). На рис. 1 также изображены демпферы, условно обозначающие наличие сопротивления пропорционального скорости движения корпуса.

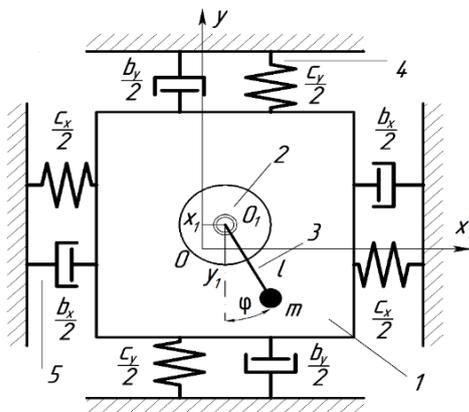


Рис. 1. Механическая модель маятника, вращающегося на валу двигателя, установленного в корпусе:

1 – корпус (точка  $O_1$  – центр масс корпуса и ротора);  
2 – ротор; 3 – маятник; 4 – невесомые упругие опоры корпуса; 5 – демпферы корпуса

Fig. 1. Mechanical model of the pendulum rotating on the shaft on an engine mounted in the body:

1 – body (point  $O_1$  is a body and rotor mass centre);  
2 – rotor; 3 – pendulum; 4 – weightless elastic supports of the body; 5 – dampers of the body

Движение модели будем изучать по отношению к неподвижной системе координат  $Oxyz$ , начало которой (точка  $O$ ) совпадает с

центром масс корпуса в положении его статического равновесия. Будем также считать, что движение вдоль оси  $z$  и поворот вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  отсутствуют. Тогда для описания движения модели можно использовать три обобщенных координаты:  $x_1$ ,  $y_1$  – перемещения центра масс корпуса,  $\theta_1$  – вращение ротора. Кроме того, угол отклонения маятника от его нижнего положения обозначим  $\varphi$ .

Для вывода дифференциальных уравнений движения модели используем уравнения Лагранжа 2-го рода в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} = - \frac{d\Pi}{dq_i} - \frac{d\Phi}{dq_i} + Q_\varphi, \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия механической системы;  $q_i$  – обобщенная координата;  $\Pi$  – потенциальная энергия механической системы;  $\Phi$  – функция Релея (функция рассеивания);  $Q_\varphi = k(\omega - \dot{\varphi})$ . Здесь  $\omega$  – угловая скорость ротора;  $\dot{\varphi}$  – угловая скорость маятника;  $k$  – коэффициент сопротивления относительно вращению маятника на валу ротора.

При выбранных обобщенных координатах выражение для кинетической энергии модели, которая складывается из кинетической энергии корпуса, кинетической энергии ротора и кинетической энергии маятника, имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_p \omega^2 + ml (\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2.$$

В этом выражении  $M = M_k + M_p + m$  ( $M_k$  – масса корпуса;  $M_p$  – масса ротора;  $m$  – масса маятника);  $I_p$  – момент инерции ротора;  $l$  – длина маятника.

Выражение для потенциальной энергии, которое складывается из потенциальной энергии деформации упругих опор в горизонтальном и вертикальном направлениях и потенциальной энергии сил тяжести корпуса, ротора и маятника с учетом условия статического равновесия имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_x x_1^2 + \frac{1}{2} c_y y_1^2 - mgl \cos \varphi.$$

Здесь  $c_x$ ,  $c_y$  – суммарная жесткость невесомых опор в горизонтальном и вертикальном направлениях;  $g$  – ускорение свободного падения.

Выражение для функции Релея при наличии демпфирования корпуса будет иметь вид:

$$\Phi = \frac{1}{2}b_x \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_y \dot{y}_1^2,$$

где  $b_x, b_y$  – коэффициенты сопротивления движению корпуса в горизонтальном и вертикальном направлениях.

После процедуры Лагранжа (1) получим систему трех дифференциальных уравнений для описания движения модели:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + b_x \dot{x}_1 + c_x x_1 = ml(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi); \\ M\ddot{y}_1 + b_y \dot{y}_1 + c_y y_1 = -ml(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi); \\ ml^2 \ddot{\varphi} + ml\ddot{x}_1 \cos \varphi + ml\ddot{y}_1 \sin \varphi = \\ = \mu(\omega - \dot{\varphi}) - mgl \cos \varphi. \end{cases}$$

### Моделирование закона вращения маятника

Задачей вычислительного эксперимента, который заключался в численном интегрировании системы уравнений (2), являлось построение зависимости угловой скорости маятника от момента сопротивления в опоре маятника на валу при постоянстве остальных параметров механической системы. При расчете принимались следующие исходные данные:  $M_k = 8$  кг;  $M_p = 2$  кг;  $m = 0,02$  кг;  $l = 0,05$  м;  $c = c_x = c_y = 100\,000$  Н/м;  $b_x = b_y = 100$  Н·с/м. Как видно из исходных данных исследуемая механическая система имеет одну собственную частоту колебаний  $k = \sqrt{\frac{c}{M}} = 100$  рад/с. Примем также,

что при  $0 \leq t \leq 6$  с ротор вращается по закону  $\omega = 50t$ , а при  $t > 6$  с угловая скорость ротора  $\omega = 300$  рад/с.

На рис. 2 представлены законы вращения маятника при различных коэффициентах трения  $\mu$  в его опоре.

Как видно из графиков, при значении  $\mu = 0,142 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с и  $\mu = 0,495 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с угловая скорость маятника равна собственной частоте колебаний механической системы, т. е. наблюдается эффект «застревания» маятника на валу механической системы. При дальнейшем увеличении коэффициента сопротивления угловая скорость маятника стремится к угловой скорости ротора (линии  $\omega$ ).

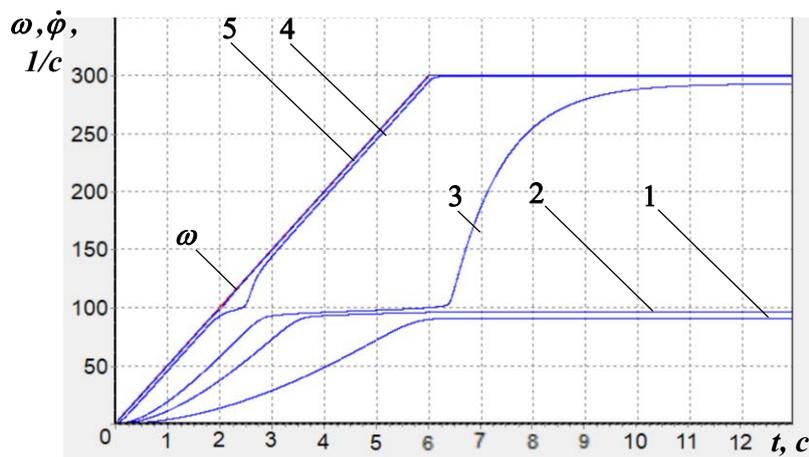
### Вывод обособленного уравнения вращения маятника на валу механической системы

Для системы уравнений (2) введем обозначения:  $c_x = c_y = c$ ;  $b_x = b_y = b$ ;  $\frac{b}{M} = 2n$ ;

$\frac{c}{M} = k^2$ ;  $\frac{ml}{M} = h$ . Тогда эту систему уравнений

можно записать в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + k^2 x_1 = h(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi); \\ \ddot{y}_1 + 2n\dot{y}_1 + k^2 y_1 = -h(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi); \\ ml^2 \ddot{\varphi} + \mu(\dot{\varphi} - \omega) = -ml(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi) - \\ - mgl \cos \varphi. \end{cases} \quad (3)$$



**Рис. 2.** Законы движения маятника при различных значениях коэффициента трения в его опоре:

1 –  $\mu = 0,142 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с; 2 –  $\mu = 0,495 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с; 3 –  $\mu = 0,001 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с;

4 –  $\mu = 0,01 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с; 5 –  $\mu = 0,1 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с

**Fig. 2.** Laws of pendulum motion under different values of friction coefficient in its bearer

1 –  $\mu = 0,142 \cdot 10^{-3}$  N·m·s; 2 –  $\mu = 0,495 \cdot 10^{-3}$  N·m·s; 3 –  $\mu = 0,001 \cdot 10^{-3}$  N·m·s;

4 –  $\mu = 0,01 \cdot 10^{-3}$  N·m·s; 5 –  $\mu = 0,1 \cdot 10^{-3}$  N·m·s

Будем далее считать, что  $\dot{\varphi}^2 \gg \ddot{\varphi}$ , тогда первые два уравнения системы (3) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + k^2 x_1 = h\dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\ \dot{y}_1 + 2n\dot{y}_1 + k^2 y_1 = -h\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \end{cases} \quad (4)$$

Это неоднородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение каждого из них состоит из суммы двух решений: общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x_1 = x_1^* + x_2^{**}; \quad y_1 = y_1^* + y_2^{**}.$$

Выражения для общего решения однородных уравнений известны:

$$\begin{aligned} x_1^* &= e^{-nt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t); \\ y_1^* &= e^{-nt}(C_3 \sin k_1 t + C_4 \cos k_1 t), \end{aligned}$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ .

В дальнейшем будем считать, что свободные колебания затухают и учитывать их не будем. Частные решения будем искать в виде:

$$x_1^{**} = a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi; \quad y_1^{**} = a_2 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi.$$

Производные от этих выражений при учете  $\dot{\varphi}^2 \gg \ddot{\varphi}$  будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{**} &= \dot{\varphi}(a_1 \cos \varphi - b_1 \sin \varphi); \\ \dot{y}_1^{**} &= \dot{\varphi}(a_2 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi); \\ \ddot{x}_1^{**} &= \dot{\varphi}^2(a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi); \\ \ddot{y}_1^{**} &= \dot{\varphi}^2(a_2 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя далее соотношения (5) в (4) и приравнявая выражения соответственно при  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h\dot{\varphi}^2(k^2 - \dot{\varphi}^2)}{(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2}; \\ b_1 &= -\frac{h\dot{\varphi}^2(2n\dot{\varphi})}{(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2}; \\ a_2 &= -\frac{h\dot{\varphi}^2(2n\dot{\varphi})}{(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2}; \\ b_2 &= -\frac{h\dot{\varphi}^2(k^2 - \dot{\varphi}^2)}{(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2}. \end{aligned}$$

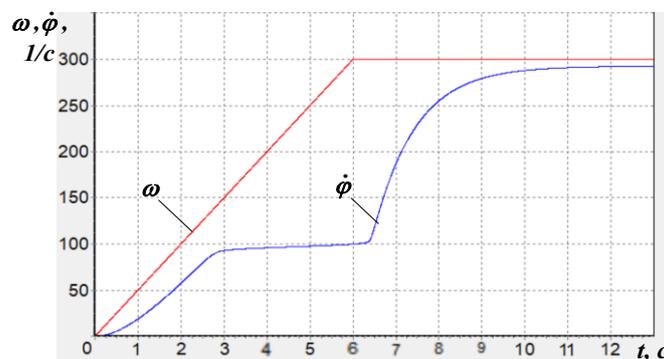
Подставляя далее найденные частные решения в третье уравнение системы (3), получим обособленное дифференциальное уравнение для описания движения маятника на валу механической системы:

$$ml^2\ddot{\varphi} + \mu(\dot{\varphi} - \omega) = -\frac{mlh\dot{\varphi}^2(2n\dot{\varphi})}{(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2} - mgl \cos \varphi. \quad (6)$$

Приведем это уравнение к нормальному виду, поделив обе части уравнения на  $ml^2$ :

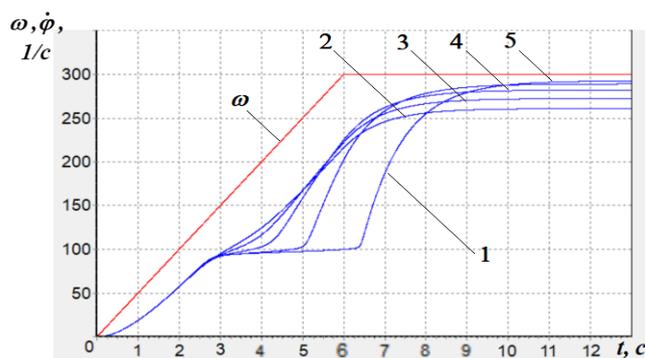
$$\ddot{\varphi} + \beta(\dot{\varphi} - \omega) = -\frac{m\dot{\varphi}^4(2n\dot{\varphi})}{M(k^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n^2\dot{\varphi}^2} - \frac{g \cos \varphi}{l}. \quad (7)$$

Из этого уравнения наглядно видно, что на вращение маятника на валу механической системы и, соответственно, на возникновение эффекта «застревания» маятника влияет, в первую очередь, момент сопротивления в опоре маятника и, во вторую – собственная частота колебаний и демпфирование механической системы. Внешне система уравнений (3) и уравнение (7) похожи на уравнения, приведенные в работах И.И. Блехмана [20, 21], посвященные описанию эффекта Зоммерфельда.



**Рис. 3.** Закон движения маятника при значении коэффициента трения  $\mu = 0,001 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$  при коэффициенте демпфирования  $b = 100 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$

**Fig. 3.** Laws of pendulum motion under friction coefficient  $= 0,001 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$  and damping coefficient  $b = 100 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$



**Рис. 4.** Исследование влияния коэффициента демпфирования  $b$  на угловую скорость маятника при  $\mu = 0,001 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ :

$1 - b = 100 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ ;  $2 - b = 150 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ ;  $3 - b = 200 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ ;  $4 - b = 250 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$ ;  $5 - b = 300 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$

**Fig. 4.** Study of damping coefficient  $b$  effect on pendulum's angular velocity at  $\mu = 0,001 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ :

$1 - b = 100 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ;  $2 - b = 150 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ;  $3 - b = 200 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ;  $4 - b = 250 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ;  $5 - b = 300 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$

Интегрирование уравнения (7) проводилось при тех же исходных данных, что и при численном решении системы (2). В результате был получен закон движения маятника на валу механической системы (рис. 3).

Этот график построен при тех же данных, что и для построения закона движения 3 (рис. 2), когда вначале наблюдается «застывание» маятника на угловой скорости, равной собственной частоте колебаний механической системы, а затем маятник разгоняется до угловой скорости ротора. Кривые практически совпадают, что свидетельствует о достоверности полученных результатов. Полученное обособленное уравнение движения маятника на валу механической системы дает возможность оценить влияние демпфирования механической системы на законы движения маятника (рис. 4).

Демпфирование существенно влияет на существование эффекта «застывания» маятника на валу механической системы, а также на его угловую скорость в установившемся режиме вращения. При большом коэффициенте демпфирования рассматриваемый эффект может не проявиться.

Подобное явление «застывания» шаров наблюдалось в шаровом автобаланси́ре. Исследования шаровых автобаланси́ров роторов в [22–24] показали, что в отдельных случаях балансировки не происходит, шары, сблизившись друг с другом, вращаются в камере как единое тело с угловой скоростью, близкой к критической скорости ротора, когда сам он вращается с заданной угловой скоростью (эффект Зоммерфельда).

## Выводы

Получено обособленное дифференциальное уравнение вращения маятника на валу механической системы, позволяющее оценить влияние коэффициента трения в опоре маятника, собственной частоты и закона движения маятника на валу механической системы, которые дали совпадающие результаты. Впервые установлено, что на закон движения маятника и на возникновение эффекта «застывания» маятника на вращающемся валу существенное влияние оказывает демпфирование механической системы. Проведено сравнение результатов двух разных методов.

## Список литературы

1. Артюнин А.И. Исследование движения ротора с автобаланси́ром // Известия вузов. Машиностроение. 1993. № 1. С. 15–18.
2. Артюнин А.И. Эффект «застывания» и особенности движения ротора с маятниковым автобаланси́ром // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 8. С. 443–454.
3. Artyunin A.I., Eliseev S.V., Sumenkov O. Yu. Experimental Studies on Influence of Natural Frequencies of Oscillations of Mechanical system on Angular Velocity of Pendulum on Rotating Shaft // Lecture Notes in Mechanical Engineering ICIE-2018, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Industrial Engineering. pp. 159–166.
4. Artyunin A.I., Barsukov C.V., Sumenkov O. Yu. Peculiarities of Motion of Pendulum on Mechanical System Engine Potating Shaft // Lecture Notes in Mechanical Engineering ICIE-2019, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Industrial Engineering. V1. pp. 649–657.

5. Галилей Г. Избранные труды в двух томах. М.: Наука, 1964. Т. 2. 572 с.
6. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: ЛЕНАНАД, 2017. 707 с.
7. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 578 с.
8. Stephenson A. On a new type of dynamic stability // *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 1908. Vol. 52. No. 8, pp. 1–10.
9. Erdelyi A. Uber die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierenden Aufhangepunkt // *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, 1934. Bd.14, pp. 235–247.
10. Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945. 137 с.
11. Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике. Киев: Сб. трудов Ин-та строит. механики АН УССР, 1950. Т. 14. С. 9–34.
12. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
13. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физ. наук*, 1951. Т. XLIV. Вып. 1. С. 7–20.
14. Челомей В.Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 335 с.
15. Рагульскис К.М. Механизмы на вибрирующем основании (Вопросы динамики и устойчивости). Каунас: Изд-во Ин-та энергетики и электротехники АН ЛитССР, 1963. 232 с.
16. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 254 с.
17. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Об устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // *Прикладная математика и механика*, 2006. Т. 70. С. 835–843.
18. Мартыненко Ю.Г., Формальский М.А. Управляемый маятник на подвижном основании // *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2013. № 1. С. 9–23.
19. Холостова О.В. Задачи динамики тел с вибрирующим подвесом. Ижевск: изд-во ИКИ, 2016. 308 с.
20. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит. 1994. 400 с.
21. Блехман И.И. Вибрационная механика и вибрационная реология. М.: Физматлит, 2018. 752 с.
22. Ryzhik V., Sperling L., Duckstein H. Display of the Sommerfeld-Effekt in a Rigid Rotor One-plain Autobalancing Device. *Proc. Of XXX Summer School «Advanced Problems in Mechanics» 2002*. pp. 25–36.
23. Ryzhik V., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous Motions Near Speeds in a Single-plane Autobalancing Device // *Technische Mechanik*. 2004, Vol. 24. pp. 25–36.
24. Lu C.J., Tien M.-H. Pure-rotary periodic motions of a planar two-ball auto-balancer system // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2012. Vol. 32. pp. 251–268.

### References

1. Artyunin A.I. Issledovanie dvizheniya rotora s avtobalansirov [Investigation of the movement of a rotor with an auto-balancer]. *Izvestiya vuzov [Proceedings of Universities]*. 1993. No. 1. Pp. 15–18.
2. Artyunin A.I. Effekt «zastrevaniya» i osobennosti dvizheniya rotora s mayatnikovym avtobalansirov [The effect of "sticking" and features of the movement of the rotor with a pendulum autobalancer]. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tehnicheskoe izdanie [Science and education: an electronic scientific and technical edition]*. Bauman MGTU, 2013. No. 8. Pp. 443–454.
3. Artyunin A.I., Eliseev S.V., Sumenkov O. Yu. Experimental studies on influence of natural frequencies of oscillations of mechanical system on angular velocity of pendulum on rotating shaft. *Lecture notes in mechanical engineering ICIE-2018, Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*, pp. 159–166.
4. Artyunin A.I., Barsukov S.V., Sumenkov O.Yu. Peculiarities of motion of pendulum on mechanical system engine rotating shaft. *Lecture notes in mechanical engineering ICIE-2019, Proceedings of the 5th International Conference on Industrial Engineering*, Vol. 1. pp. 649–657.
5. Galilei G. Izbrannye trudy v dvukh tomakh [Selected works in two volumes]. Moscow: Nauka Publ., 1964. Vol. 2. 572 p.
6. N'yuton I. Matematicheskie nachala natural'noi filosofii [Mathematical principles of natural philosophy]. Moscow: LENAANAD Publ., 2017. 707 p.
7. Gyuygens Kh. Tri memuara po mekhanike [Three memoirs on mechanics]. Moscow: AN SSSR Publ., 1951. 578 p.
8. Stephenson A. On a new type of dynamic stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 1908. Vol. 52, no 8, pp. 1–10.
9. Erdelyi A. Uber die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierenden Aufhangepunkt. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik*, 1934. Bd.14, pp. 235–247.
10. Bogolyubov N.N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoi fizike [On some statistical methods in mathematical physics]. L'vov: AN USSR Publ., 1945. 137 p.
11. Bogolyubov N.N. Teoriya vozmushchenii v nelineinoi mekhanike [Perturbation theory in nonlinear mechanics]. *Sb. trudov In-ta stroit. mekhaniki AN USSR [Proceedings of works of the University of Structural Mechanics of the AS USSR]*. Kiev: 1950, vol. 14, pp. 9–34.
12. Kapitsa P.L. Dinamicheskaya ustoichivost' mayatnika pri koleblyushcheisya tochke podvesa [Dynamic stability of the pendulum at an oscillating suspension point]. *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki [The journal of experimental and theoretical physics]*. 1951, vol. 21. Iss. 5, pp. 588–597.
13. Kapitsa P.L. Mayatnik s vibriruyushchim podvesom [Pendulum with vibrating suspension]. *Uspekhi fiz. nauk [Advances in physical sciences]*. 1951, vol. XLIV/ Iss.1, pp. 7–20.
14. Chelomei V.N. Izbrannye trudy [Selected works]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1989. 335 p.

15. Ragul'skis K.M. Mekhanizmy na vibriruyushchem osnovanii (Voprosy dinamiki i ustoichivosti) [Mechanisms on a vibrating base (Questions of dynamics and stability)]. Kaunas: Izd-vo In-ta ehnergetiki i ehlektrotekhniki AN LitSSR Publ., 1963. 232 p.
16. Strizhak T.G. Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «mayatnik» [Research methods for dynamic systems of the «pendulum» type]. Alma-Ata: Nauka Publ., 1981. 254 p.
17. Seiranyan A.A., Seiranyan A.P. Ob ustoichivosti perevernutogo mayatnika s vibriruyushchei tochkoi podvesa [On the stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied mathematics and mechanics]*. 2006, vol. 70, pp. 835–843.
18. Martynenko Yu.G., Formal'skii M.A. Upravlyaemyi mayatnik na podvizhnom osnovanii [Controlled pendulum on a movable base]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [A journal of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids]*. 2013, no 1, pp. 9–23.
19. Kholostova O.V. Zadachi dinamiki tel s vibriruyushchim podvesom [Problems of the dynamics of bodies with vibrating suspension]. Izhevsk: IKI Publ., 2016. 308 p.
20. Blekhman I.I. Vibratsionnaya mekhanika [Vibration mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 1994. 400 p.
21. Blekhman I.I. Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya reologiya [Vibration mechanics and vibration rheology]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2018. 752 p.
22. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Display of the sommerfeld-effekt in a rigid rotor one-plane autobalancing device. *Proc. of XXX Summer School «Advanced Problems in Mechanics»*, 2002, pp. 25–36.
23. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous motions near speeds in a single-plane autobalancing device. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, pp. 25–36.
24. Lu C.J., Tien M.-H. Pure-rotary periodic motions of a planar two-ball auto-balancer system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, vol. 32, pp. 251–268.

### Информация об авторах

**Артюнин Анатолий Иванович** – д-р техн. наук, профессор кафедры физики, механики и приборостроения, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: artyunin\_ai@irgups.ru.

**Барсуков Сергей Владимирович** – канд. техн. наук, доцент кафедры физики, механики и приборостроения, Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, e-mail: bars\_irkunsk@mail.ru.

**Суменков Олег Юрьевич** – магистр Научно-технологического университета «Сириус», Сочи, e-mail: Artunina2107@yandex.ru

### Information about the authors

**Anatolij I. Artyunin** – Doctor of Engineering Science, The Full Professor of the Department Physics, Mechanics and Instrumentation, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: artyunin\_ai@irgups.ru.

**Sergey V. Barsukov** – Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor of the Department Physics, Mechanics and Instrumentation, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: bars\_irkunsk@mail.ru.

**Oleg Yu. Sumenkov** – Master's Degree of the The Sirius University of Science and Technology, Sochi, e-mail: Artunina2107@yandex.ru