

## Применение интеграла Дюамеля для анализа электромагнитных процессов в силовых цепях электровозов переменного тока

Д. А. Супрун, В. Г. Скорик✉

Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, Российская Федерация

✉ skorik@festu.khv.ru

### Резюме

В статье рассмотрен способ получения аналитической зависимости отклика системы на воздействие сигнала сложной формы. В некоторых случаях специфика формы кривой воздействующего сигнала не позволяет получить искомую зависимость путем классического решения дифференциального уравнения. Отмечено, что в подобной ситуации аналитическая зависимость искомой физической величины от времени не может быть получена с помощью численных методов решения. Поэтому в заданных условиях предложено применение интеграла Дюамеля в качестве наиболее оптимального способа решения поставленной задачи. Практической областью применения данного метода является расчет электромагнитных переходных процессов в цепях силовой электроники. В качестве примера в статье рассмотрено применение интеграла Дюамеля при математическом моделировании быстропротекающих процессов в электрических цепях магистральных электровозов однофазно-постоянного тока. Процессы переключения силовых тиристорных ключей приводят к резкому изменению основной электрической схемы протекания тока. Для изучения характера изменения тока в цепях тяговых двигателей выполнен вывод его аналитической зависимости от времени. При математическом моделировании вычисления проводились для условий, определенных штатным алгоритмом управления в тяговом режиме работы электровоза, без учета особенностей многоконтурной коммутации тиристорных плеч. Сравнительный анализ результатов моделирования и результатов измерений при реальных условиях эксплуатации электровоза показал адекватность созданной математической модели реальным процессам, протекающим в силовых цепях подвижного состава. Полученные результаты расчета доказывают возможность использования предложенного подхода для анализа электромагнитных переходных процессов в электромеханических системах.

### Ключевые слова

Интеграл Дюамеля, ток в цепи двигателя, электровоз переменного тока, выпрямительно-инверторный преобразователь, условия Дирихле, тяговый двигатель последовательного возбуждения

### Для цитирования

Супрун Д. А. Применение интеграла Дюамеля для анализа электромагнитных процессов в силовых цепях электровозов переменного тока / Д. А. Супрун, В. Г. Скорик // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 1 (73). – С. 145–152. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.1(73).145-152

### Информация о статье

поступила в редакцию: 21.03.2022 г.; поступила после рецензирования: 24.03.2022 г.; принята к публикации: 25.03.2022 г.

## Using the Duhamel Integral to analyze electromagnetic processes in the power circuits of AC electric locomotives

D. A. Suprun, V. G. Skorik✉

Far Eastern State Transport University, Khabarovsk, the Russian Federation

✉ skorik@festu.khv.ru

### Abstract

The article considers a method for obtaining an analytical dependence of the system response to the impact of a complex waveform signal. In some cases, the specificity of the shape of the acting signal curve does not allow obtaining the desired dependence by the classical solution of a differential equation. It is noted that in such a situation, finding the analytical dependence of the desired physical quantity on time rules out the possibility of using numerical solutions. Therefore, under given conditions, the use of the Duhamel integral is proposed as the most optimal way to solve the problem. The practical area of application of this method is the calculation of electromagnetic transients in power electronics circuits. As an example, the article considers the use of the Duhamel integral in mathematical modeling of fast processes in the electrical circuits of single-phase AC main electric locomotives. The switching processes of power thyristor switches lead to an abrupt change in the main electrical circuit of the current flow. To study the nature of the change in the circuits current of traction motors, its analytical dependence on time was derived. In mathematical modeling, the calculations were carried out for the conditions determined by the standard control algorithm in the traction mode of the electric locomotive, without taking into account the features of multi-circuit switching of thyristor arms. A comparative analysis of the simulation and measurement results under real operating conditions of an electric locomotive showed the adequacy of the created mathematical model to real processes occurring in the power circuits of the rolling stock. The obtained results of the calculation prove the possibility of using the proposed approach for the analysis of electromagnetic transients in electromechanical systems.

**Keywords**

Duhamel integral, current in the motor circuit, electric locomotive of alternating current, reversible converter, Dirichlet conditions, traction motor of sequential excitation

**For citation**

Suprun D. A., Skorik V. G. Primenenie integrala Dyumelya dlya analiza elektromagnitnykh protsessov v silovykh tseyakh elektrivozov peremennogo toka [Using the Duhamel integral to analyze electromagnetic processes in the power circuits of AC electric locomotives]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, No. 1 (73), pp. 145–152. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.1(73).145-152

**Article Info**

Received: 21.03.2022; revised: 24.03.2022; accepted: 25.03.2022.

**Введение**

При решении практических задач нередко возникает необходимость получения аналитического выражения функции, описывающей исследуемый физический процесс. Однако, для сложных функций решение составленных интегрально-дифференциальных уравнений невозможно ввиду наличия в этих функциях неустранимых точек разрыва.

Сама задача, нацеленная на получение аналитической зависимости, не может быть решена с использованием численных методов или имитационного моделирования. В таком случае альтернативным способом получения желаемого результата является применение метода интеграла Дюамеля [1–7]. В основу метода положен интеграл особого вида, позволяющий рассчитать отклик системы на изменяющееся во времени сложное входное воздействие.

Путем аппроксимации любое сложное воздействие можно представить в виде единичных ступенчатых функций, сдвинутых относительно друг друга во времени. При этом результирующая реакция системы на такие воздействия может быть определена исходя из принципа наложения. Применение такого принципа для расчета переходных процессов в электрических цепях позволяет определить конечную функцию тока как сумму токов, протекающих под воздействием составляющих входного напряжения [8–12].

В зависимости от удобства и простоты вычисления подынтегральных выражений может использоваться одна из четырех форм классической записи данного интеграла [4].

**Адаптация метода интеграла Дюамеля для определения тока в цепи тяговых двигателей магистрального электровоза**

Одной из подобных задач является анализ электромагнитных переходных процессов в

устройствах силовой и информационной электроники. Причиной тому служит быстрота процессов коммутации в цепях, содержащих полупроводниковые безынерционные элементы.

Электровозы переменного тока являются довольно значительным по мощности (до 10 МВт на один электровоз) потребителем электроэнергии, содержащим преобразователи, построенные на электронной элементной базе [13]. В состав силовой схемы большинства современных электровозов входят полупроводниковые тиристорные выпрямительно-инверторные преобразователи (ВИП), позволяющие при подключении локомотива к контактной сети переменного тока 25 кВ после выпрямления напряжения обеспечить питание тяговых электрических машин постоянного тока. При этом за счет применения в составе преобразователей тиристоров или транзисторов обеспечивается возможность регулирования силы тяги двигателей путем изменения среднего значения напряжения на их выводах. Конструктивно ВИП представляет собой схему, состоящую из нескольких параллельно соединенных мостовых однофазных выпрямителей, присоединенным к выводам секционированной вторичной обмотке трансформатора электровоза. Штатный алгоритм управления преобразователями электровозов, применяемых в настоящее время, предусматривает четырехзонное регулирование напряжения на тяговых двигателях по зонно-фазовому принципу [14–17]. Зонное регулирование обеспечивается включением в работу различных секций вторичной обмотки трансформатора в пределах всего полупериода сетевого напряжения. Фазовая составляющая регулирования реализуется путем подключения с помощью тиристоров дополнительной секции вторичной обмотки в различные моменты времени в зависимости от положения рукоятки контроллера машиниста.

Подключение отдельных секций обмоток трансформатора вызывает практически скачкообразное повышение напряжения в цепи выпрямленного тока, и напряжение может быть аналитически задано кусочно-линейной функцией. В то же время, с учетом наличия в них активных и реактивных элементов, выпрямленный ток является откликом системы на воздействие сложной функции.

На основании вышеизложенного в качестве примера использования интеграла Дюамеля рассмотрена кривая напряжения на выводах ВВП электровоза переменного тока [18] (рис. 1).

Данная кривая в моменты коммутации тиристорных плеч обладает точками разрыва первого рода. Следовательно, для того чтобы получить аналитическую зависимость функции выпрямленного тока от времени, применение классического решения дифференциального уравнения невозможно, ввиду невыполнения условий Дирихле:

$$u_d = L_{\text{эКВ}} \frac{di_d}{dt} + R_{\text{эКВ}} i_d + e_a(i_d)$$

где  $R_{\text{эКВ}}$  – суммарная величина активного сопротивления контура протекания тока;  $L_{\text{эКВ}}$  – приведенная величина индуктивности этого контура;

$e_a(i_d)$  – реакция якоря тягового двигателя.

Следует заметить, что в представленном примере не учитывается длительность коммутационных процессов, так как на результат интегрирования эти процессы оказывают незначительное влияние. Однако учет особенностей коммутации возможен с применением интеграла Дюамеля аналогичным образом, путем добавления в кривую выпрямленного напряжения дополнительных промежуточных интервалов.

В общем виде функция тока на расчетном интервале времени имеет следующий вид:

$$i_k(t) = i_{k-1}(t_{k-1}) + \Delta U_k \cdot g(t - t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t \frac{du_k(\tau)}{d\tau} \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

где  $i_{k-1}$  – функция тока на предшествующем участке;  $\Delta U_k$  – скачок напряжения в начале расчетного интервала;  $g(t - t_{k-1})$  – функция переходной проводимости на предыдущем участке;  $u_k(\tau)$  – функция напряжения  $u_k(t)$  на диапазоне  $\tau \in [t_{k-1}; t]$ ;  $g(t - \tau)$  – функция переходной проводимости на диапазоне  $\tau \in [t_{k-1}; t]$ .

Выражение (1) содержит три составляющие:

–  $i_{k-1}(t_{k-1})$ , определяющая значение иско-

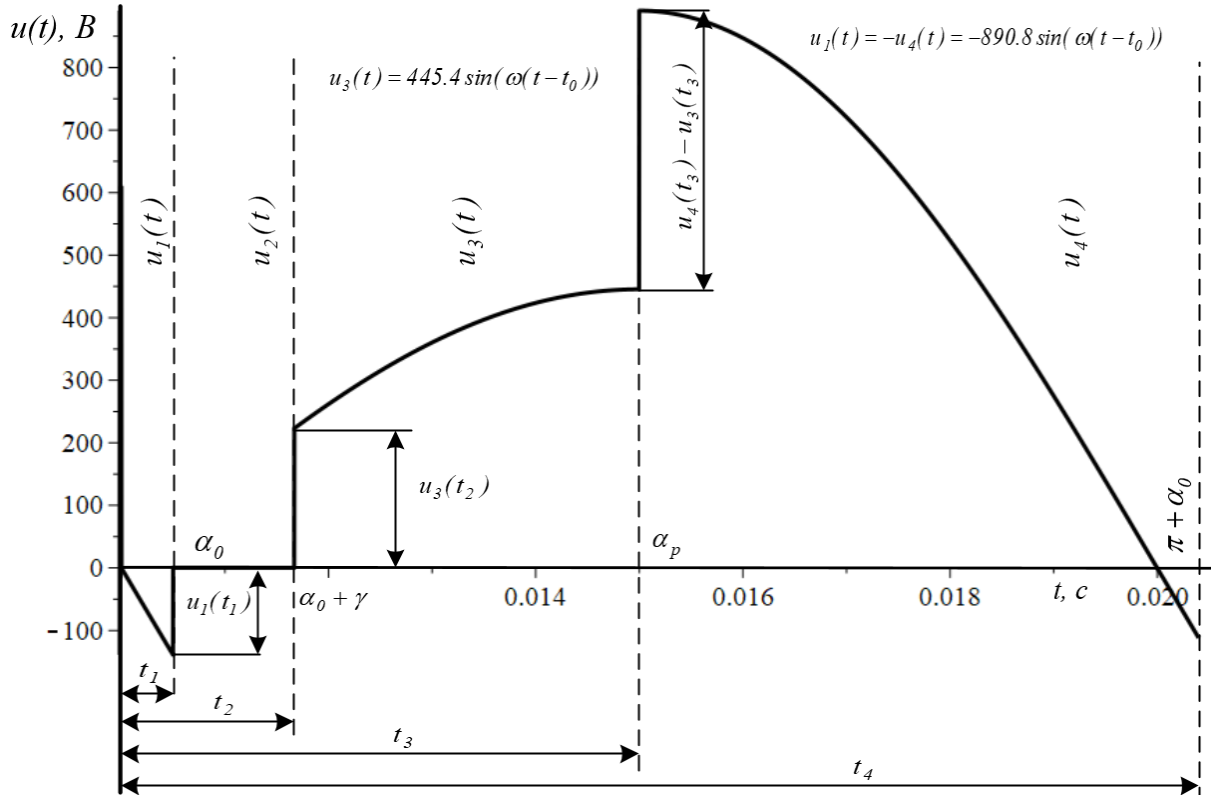


Рис. 1. Расчетная форма полупериода выпрямленного напряжения  
Fig. 1. The calculated half-period of the rectified voltage

мой функции в конце предшествующего временного интервала  $t_{k-1}$ ;

–  $\Delta U_k g(t - t_{k-1})$ , определяющая переходную функцию в точке разрыва первого рода;

$$- \int_{t_{k-1}}^t \frac{du_k(\tau)}{d\tau} \cdot g(t - \tau) d\tau, \text{ определяющая за-}$$

висимость функции тока от функции напряжения на рассматриваемом интервале времени.

В данном выражении задействованы две переменных времени. Это сделано для того, чтобы разделить переменную ( $\tau$ ), по которой производится интегрирование, и переменную ( $t$ ), определяющую функциональную зависимость величины тока на заданном интервале.

Кроме того, для выполнения необходимых вычислений на каждом участке определяется переходная функция проводимости контура протекания тока. Переходная проводимость является откликом электрической системы на ступенчатый единичный входной сигнал напряжения. Общий вид функции переходной проводимости представляет собой выражение:

$$g(t) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot t}), \quad (2)$$

где  $p$  – постоянная затухания, которая рассчитывается исходя из суммарной величины активного сопротивления  $R_{\text{экв}}$  электрического контура протекания тока и приведенной величины индуктивности  $L_{\text{экв}}$  этого контура.

При определении аналитических выражений в данном случае наиболее трудоемким является определение величины реакции якоря тяговых двигателей электровоза. Однако, учитывая реактивный характер наводимой в двигателе противо-ЭДС, ее возможно учесть в виде нелинейной эквивалентной индуктивности. Данное эквивалентирование выполняется для установившегося режима работы двигателя постоянного тока, т. е. при неизменной частоте вращения якоря. Поскольку механическая составляющая привода обладает высокой инерционностью по сравнению с электромагнитными процессами, то корректное преобразование реакции якоря в эквивалентную индуктивность также выполняется и для кратковременных переходных режимов.

Изложенные условия с заменой противо-ЭДС линейной индуктивностью является частным случаем [19], однако, для облегчения восприятия информации такое упрощение оправдано.

Порядок подготовки задания на расчет для определения аналитического выражения функции выпрямленного тока с использованием метода интеграла Дюамеля далее рассмотрен более подробно. Имея дело с кривой достаточно сложной формы, наиболее рационально выполнять вычисления составляющих конечного уравнения пошагово. Формирование задания можно представить в виде нескольких этапов:

1. Определение переходных функций проводимости контура протекания выпрямленного тока на каждом интервале:

$$g(t - t_0) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot (t - t_0)}); \quad (3)$$

$$g(t - t_1) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot (t - t_1)}); \quad (4)$$

$$g(t - t_2) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot (t - t_2)}); \quad (5)$$

$$g(t - t_3) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot (t - t_3)}); \quad (6)$$

$$g(t - t_4) = \frac{1}{R_{\text{экв}}} (1 - e^{-p \cdot (t - t_4)}). \quad (7)$$

2. Нахождение производной функции напряжения на каждом интервале времени:

$$\frac{du_1(t)}{dt} = -U_{2m} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t - t_0)); \quad (8)$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{du_3(t)}{dt} = U_{1m} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t - t_0)); \quad (10)$$

$$\frac{du_4(t)}{dt} = U_{2m} \cdot \omega \cdot \cos(\omega(t - t_0)). \quad (11)$$

3. Определение расчетных значений функции напряжения в точках разрыва:

$$u_1(t_1) = -U_{2m} \sin(\omega(t_1 - t_0)); \quad (12)$$

$$u_3(t_2) = U_{1m} \sin(\omega(t_2 - t_0)); \quad (13)$$

$$u_3(t_3) = U_{1m} \sin(\omega(t_3 - t_0)); \quad (14)$$

$$u_4(t_3) = U_{2m} \sin(\omega(t_3 - t_0)); \quad (15)$$

$$u_4(t_4) = U_{2m} \sin(\omega(t_4 - t_0)); \quad (16)$$

Выполнение промежуточных расчетов, описанных ранее, не является обязательным условием для получения результата. Окончательный расчет может быть выполнен в виде единой зависимости, однако такой подход повышает вероятность возникновения ошибки при подготовке расчетного задания.

С учетом подстановки представленных выше промежуточных результатов, функция тока на каждом временном интервале имеет вид:

$$i_1(t) = u(0) \cdot g(t) + (0 - u(0))g(t - t_0) + \int_0^t \frac{du_1(\tau)}{d\tau}(\tau) \cdot g(t - \tau)d\tau; \quad (17)$$

$$i_2(t) = i_2(t_2) = i_1(t_1) + (0 - u_1(t_1)) \cdot g(t - t_1); \quad (18)$$

$$i_3(t) = i_2(t_2) + (u_3(t_2) - 0) \cdot g(t - t_2) + \int_{t_2}^t \frac{du_3(\tau)}{d\tau}(\tau) \cdot g(t - \tau)d\tau; \quad (19)$$

$$i_4(t) = i_3(t_3) + (u_4(t_3) - u_3(t_3)) \cdot g(t - t_3) + \int_{t_3}^t \frac{du_4(\tau)}{d\tau}(\tau) \cdot g(t - \tau)d\tau. \quad (20)$$

Функция  $u(0)$  в формуле (17) представляет собой постоянное напряжение, эмпирически подобранное таким образом, чтобы исключить переходный процесс на начальном интервале расчета.

Для наглядного отображения результатов использования данного метода, рассмотрена функция тока в цепях двигателей электровоза при действии выпрямленного напряжения (см. рис. 1). Уровень и форма кривой напряжения на двигателях соответствует второй зоне регулирования с углом фазового регулирования  $\alpha_p = 90^\circ$  [18].

В виде кусочно-заданной функции зависимость выпрямленного напряжения от време-

ни будет иметь вид:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = -U_{2m} \sin(\omega(t - t_0)) & 0 < \omega t < \alpha_0 \\ u_2(t) = 0 & \alpha_0 \leq \omega t < \alpha_0 + \gamma \\ u_3(t) = U_{1m} \sin(\omega(t - t_0)) & \alpha_0 + \gamma \leq \omega t < \alpha_p \\ u_4(t) = U_{2m} \sin(\omega(t - t_0)) & \alpha_p \leq \omega t < \pi + \alpha_0 \end{cases}$$

После выполнения всех вычислений по формулам (1)–(20), получены функции тока для каждого расчетного интервала (рис. 2).

Каждый закон изменения тока имеет корректную форму на своем расчетном интервале времени, и применение его на прочих участках приведет к неверному результату моделирования.

Для проверки адекватности моделирования электромагнитных процессов с помощью применения метода интеграла Дюамеля было выполнено сравнение полученных аналитически результатов с реальными кривыми, записанными в ходе опытных испытаний электровоза ВЛ80Р на участке Дальневосточной железной дороги [20, 21]. Сравнение выполнялось для работы электровоза на второй зоне регулирования напряжения при  $\alpha_p = 91^\circ$  и прочих равных условиях.

При определении адекватности применялся гармонический анализ представленных кривых в диапазоне от 0 до 40 гармоник, а также оценивался интегрированный показатель

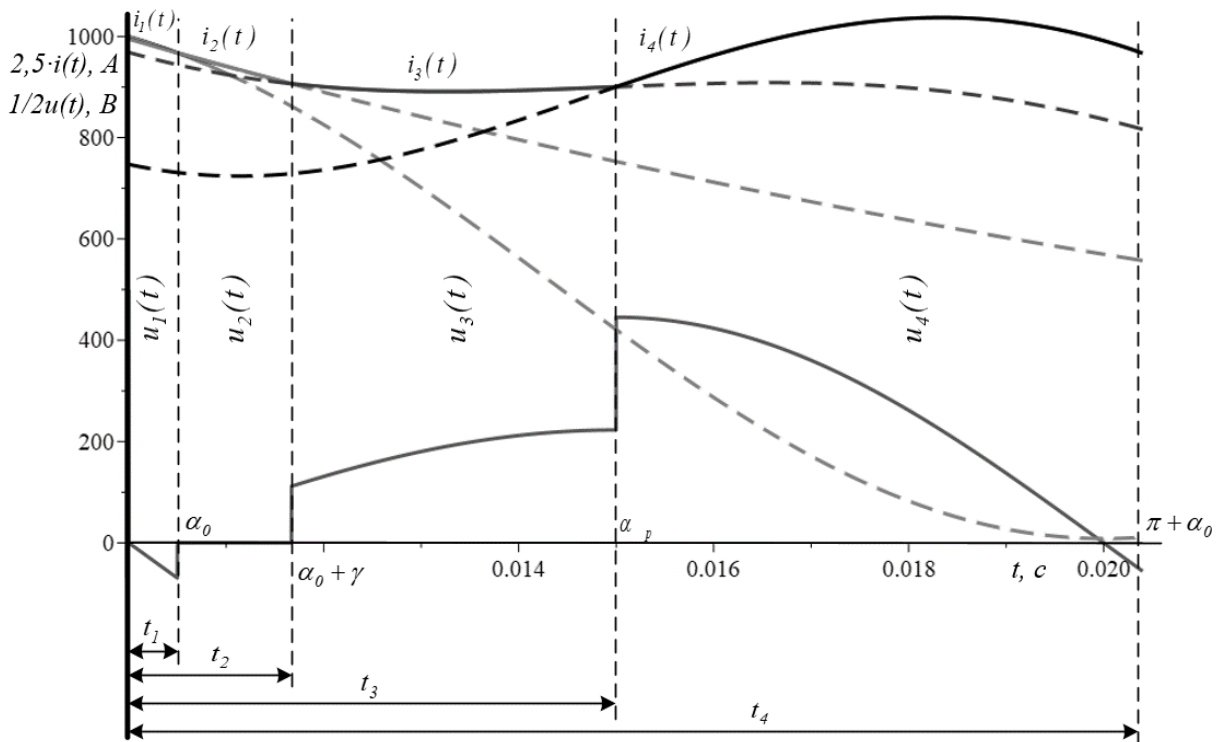


Рис. 2. Результат расчета кусочно-заданной функции тока на полупериоде напряжения  
 Fig. 2. The result of calculating the piecewise-specified stream function on the voltage half-period

относительной погрешности мгновенных значений напряжения и тока в различные моменты времени.

Сравнение форм кривых выпрямленного тока  $i_{изм}(t)$  и  $i_{расч}(t)$  (рис. 3), проведенный анализ их гармонических составов показали хорошую сходимость результатов моделирования с реальными процессами. Погрешность по мгновенным значениям тока и по уровню отдельных гармоник тока не превышает 4%, что является допустимым. Анализ кривых тока и напряжения (см. рис.3) позволяет сказать, что наибольшая погрешность в кривых напряжения обусловлена неучетом длительности фазовой коммутации тиристорных преобразователя (момент времени, соответствующий  $\alpha_p$ ). Значительная индуктивность цепи выпрямленного тока способствует тому, что во время фазовой коммутации выпрямленный ток практически не меняет характера своей динамики, поэтому влияние неучета фазовой коммутации не приводит к значительному увеличению погрешности в токе.

Сравнительный анализ результатов моделирования с экспериментальными кривыми показал, что предлагаемый подход выполнения моделирования с помощью интеграла Дюамеля можно применять как способ анализа электромагнитных процессов в цепях выпрямленного

тока электровозов.

### Заключение

Оценивая возможность использования метода интеграла Дюамеля для анализа электромагнитных процессов, стоит подчеркнуть его универсальность, позволяющую, вне зависимости от сложности исходной функции, осуществлять вычисление отклика системы. Несмотря на высокие затраты времени на подготовку расчетного задания, метод является перспективным при необходимости определения влияния отдельных факторов на конечную форму токов и напряжений в силовых и измерительных электрических цепях [22].

Негативные аспекты использования данного метода, определяемые сложностью расчетов, могут быть скомпенсированы использованием программных пакетов компьютерной алгебры. Учитывая системность формирования расчетного задания, его подготовка для периодических функций упрощается применением циклических расчетов.

Функциональные зависимости, рассчитанные при использовании рассматриваемого метода, позволяют математически исследовать сложные электромагнитные процессы непрерывно во времени, тем самым расширяя возможности анализа.

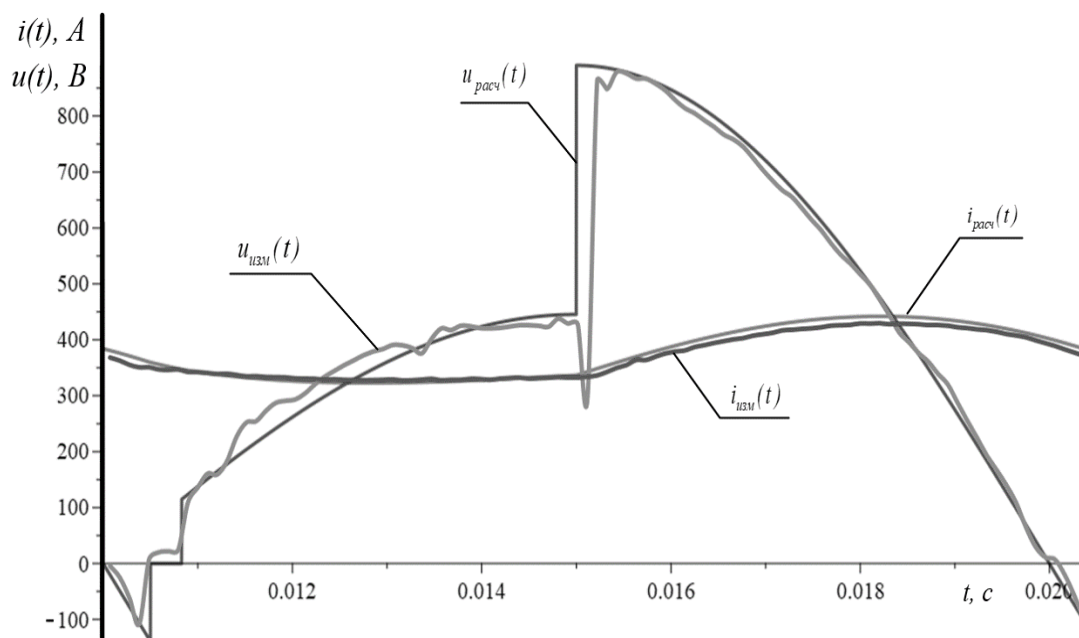


Рис. 3. Графическое сопоставление измеренных и расчетных мгновенных значений напряжения и тока в контуре тяговых двигателях

Fig. 3. Graphical comparison of measured and calculated instantaneous values of voltage and current in the traction motor circuit

## Список литературы

1. Арутюнян Т.Р., Некрасов С.А. Двусторонние методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе интеграла Дюамеля // *Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли*. 2018. Т. 10. № 3. С. 64–73.
2. Коган И.Л. Метод интеграла Дюамеля для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с точки зрения теории обобщенных функций // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки*. 2010. № 1 (20). С. 37–45.
3. Umarov S. On fractional Duhamel's principle and its applications // *Differential Equations* 2012. № 252. P. 5217–5234.
4. On theoretical and practical aspects of Duhamel's integral / M. Róžański, B. Sikora, A. Smuda et. al. // *Archives of Control Sciences*. 2021. Vol. 31(LXVII), № 4. P. 815–847.
5. Grossman Eli A. Actuarial note on Duhamel's Integral // *Journal of the Staple Inn Actuarial Society*. 1954. Vol. 12, Is. 4. P. 232–242.
6. Artyushin A.N. Duhamel's method in inverse problems for the wave equation I // *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2018. Vol. 18, Is. 2. P. 30–46.
7. Лонцих П.А., Елисеев С.В. Определение реакции механической системы на внешнее воздействие с помощью интеграла Дюамеля и эквивалентной передаточной функции // *Техника и технология геологоразведочных работ в Восточной Сибири*. Иркутск, 1972. С. 130–138.
8. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. М. : Гардарики, 1999. 638 с.
9. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М. : Высш. шк., 1990. 400 с.
10. Боев В.М. Расчет переходных процессов в электрических цепях с «некорректными» начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля и разрывных функций // *Электротехника и электромеханика*. 2018. № 4. С. 40–44. DOI: 10.20998/2074-272X.2018.4.07.
11. Исаков Д.А. Расчёт переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля // *Современная наука: теоретический и практический взгляд : материалы Междунар. конф. Уфа : Аэтерна, 2016. Т. 3. С. 39–42.*
12. Букреев Н.В. Расчет переходных процессов в электрических цепях с использованием интеграла Дюамеля // *Проблемы естествознания: история и современность : материалы Всерос. конф. Ставрополь : Секвойя, 2018. С. 34–38.*
13. Большая энциклопедия транспорта. Т.4. Железнодорожный транспорт. М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. 1039 с.
14. Власьевский С.В. Математическое моделирование процессов коммутации в выпрямительно-инверторных преобразователях электровозов однофазно-постоянного тока. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. 138 с.
15. Кулинич Ю.М., Шухарев С.А. Использование экстремального регулятора как средства повышения коэффициента мощности тиристорного преобразователя // *Изв. Транссиба*. 2016. № 2 (26). С. 91–100.
16. Тихменев Б.Н., Трахтман Л.М. Подвижной состав электрифицированных железных дорог. Теория работы электрооборудования. Электрические схемы и аппараты. М. : Транспорт, 1980. 470 с.
17. Тихменев Б.Н., Кучумов В.А. Электровозы переменного тока с тиристорными преобразователями. М. : Транспорт, 1988. 312 с.
18. Электровоз магистральный 2ЭС5К (ЗЭС5К) «Ермак». Руководство по эксплуатации. ИДМБ.661142.009РЭ. Новочеркасск : Изд-во НЭВЗ, 2004.
19. Находкин М.Д. Проектирование тяговых электрических машин. М. : Транспорт, 1976. 624 с.
20. Повышение коэффициента мощности выпрямительно-инверторного преобразователя электровоза переменного тока в режимах тяги и рекуперативного торможения / С.В. Власьевский, В.Г. Скорик, Е.В. Буяева и др. // *Электроника и электрооборудование транспорта*. 2011. № 1. С. 2–5.
21. Власьевский С.В., Скорик В.Г. Влияние работы оборудования электровозов переменного тока на качество электроэнергии в тяговой сети железных дорог. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2010. 103 с.
22. Система определения повреждений в силовом преобразователе электровоза переменного тока в режиме тяги / С.В. Власьевский, В.Г. Скорик, Д.А. Супрун и др. // *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та*. 2020. № 5 (45). С. 71–77.

## References

1. Arutyunyan T.R., Nekrasov S.A. Dvustoronnie metody integrirovaniya zhestkikh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na osnove integrala Dyumelya [Bilateral methods for integrating stiff systems of ordinary differential equations based on the Duhamel integral]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli* [Science-intensive technologies in space exploration of the Earth]. 2018, Vol. 10, no 3, pp. 64-73.
2. Kogan I.L. Metod integrala Dyumelya dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s postoyannymi koeffitsientami s tochki zreniya teorii obobschyonnykh funktsii [The Duhamel integral method for ordinary differential equations with constant coefficients from the point of view of the theory of generalized functions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko – matematicheskie nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences]. 2010, no 1 (20), pp. 37-45.
3. Umarov S. On fractional Duhamel's principle and its applications // *Differential Equations* 2012. № 252. P. 5217–5234.
4. M. Róžański, B. Sikora, A. Smuda, R. Witula On theoretical and practical aspects of Duhamel's integral *Archives of Control Sciences* Volume 31(LXVII), 2021 No. 4, pages 815–847.
5. Grossman Eli A. Actuarial note on Duhamel's Integral // *Journal of the Staple Inn Actuarial Society*. 1954. Vol. 12, Is. 4. P. 232–242.

6. Artyushin A.N. Duhamel's method in inverse problems for the wave equation I // Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2018. Vol. 18, Is. 2. P. 30–46.
7. Lontsikh P.A., Eliseev S.V. Opredelenie reaktsii mekhanicheskoi sistemy na vneshnee vozdeistvie s pomoshch'yu integrala Dyumelya i ekvivalentnoi peredatochnoi funktsii [Determination of the response of a mechanical system to external influences using the Duhamel integral and the equivalent transfer function]. *V sbornike «Tekhnika i tekhnologiya geologorazvedochnykh работ v Vostochnoy Sibiri»* [Proceedings «Technique and technology of exploration work in Eastern Siberia»]. Irkutsk, 1972, pp. 130-138.
8. Bessonov L.A. Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki: Elektricheskie tsepi [Theoretical foundations of electrical engineering: Electric circuits]. Moscow: Gardariki Publ., 1999. 638 p.
9. Matkhanov P.N. Osnovy analiza elektricheskikh tsepei. Lineinye tsepi [Fundamentals of the analysis of electrical circuits. Linear chains]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1990. 400 p.
10. Boev V.M. Raschet perekhodnykh protsessov v elektricheskikh tsepyakh s «nekorrektnymi» nachal'nymi usloviyami s pomoshch'yu integrala Dyumelya i razryvnykh funktsii [Calculation of transient processes in electrical circuits with «incorrect» initial conditions using the Duhamel integral and discontinuous functions]. *Elektrotehnika i ehlektromekhanika* [Electrical engineering and electromechanics]. 2018, no 4, pp. 40-44. DOI: 10.20998 / 2074-272X.2018.4.07.
11. Isakov D.A. Raschet perekhodnogo protsesssa s pomoshch'yu integrala Dyumelya [Calculation of the transition process using the Duhamel integral]. *Materialy Mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennaya nauka: teoreticheskii i prakticheskii vzglyad» (v 4-kh chastyakh)* [Proceedings of the International Scientific and Practical Conference «Modern science: theoretical and practical view»] (in 4 parts), Ufa, 2016, vol. 3, pp. 39-42.
12. Bukreev N.V. Raschet perekhodnykh protsessov v elektricheskikh tsepyakh s ispol'zovaniem integrala Dyumelya [Calculation of transient processes in electrical circuits using the Duhamel integral]. *Materialy Vserossiyskoi konferentsii «Problemy estestvoznaniya: istoriya i sovremennost'»* [Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference «Problems of natural sciences: history and modernity»], Stavropol', 2018, pp. 34-38.
13. Bol'shaya entsiklopediya transporta: v 8 t. T.4. Zheleznodorozhnyy transport [Great encyclopedia of transport: in 8 volumes. V.4. Railway transport]. Moscow: Bol'shaya Rossiiskaya entsiklopediya, 2003. 1039 p.
14. Vlas'evskii S.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov kommutatsii v vypryamitel'no-invertornykh preobrazovatelyakh elektrovozov odnofazno-postoyannogo toka [Mathematical modeling of switching processes in rectifier-inverter converters of single-phase-dc electric locomotives]. Khabarovsk: DVGUPS Publ., 2001. 138 p.
15. Kulinich Yu.M., Shukharev S.A. Ispol'zovanie ekstremal'nogo regul'yatora kak sredstva povysheniya koeffitsienta moshchnosti tiristornogo preobrazovatelya [Using an extreme controller as a means of increasing the power factor of a thyristor converter]. *Izvestiya Transsiba* [Bulletin of Transsib]. 2016, no 2 (26), pp. 91-100.
16. Tikhmenev B.N., Trakhtman L.M. Podvizhnoy sostav elektrifitsirovannykh zheleznykh dorog [Rolling stock of electrified railways. Theory of electrical equipment operation. Electrical circuits and devices]. Moscow: Transport Publ., 1980. 470 p.
17. Tikhmenev B.N., Kuchumov V.A. Elektrovozy peremennogo toka s tiristornymi preobrazovatelyami [Alternating current electric locomotives with thyristor converters]. Moscow: Transport Publ., 1988. 312 p.
18. Elektrovoz magistral'nyi 2EHS5K (3EHS5K) «Ermak». Rukovodstvo po ekspluatatsii. IDMB.661142.009REH (v 8 ch) [Mainline electric locomotive 2ES5K (3ES5K) «Ermak». Manual. IDMB.661142.009RE (in 8 parts)]. Novocheboksarsk: NEVZ Publ., 2004.
19. Nakhodkin M.D. Proektirovanie tyagovykh elektricheskikh mashin [Design of traction electric machines]. Moscow: Transport Publ., 1976. 624 p.
20. Vlasevskii S.V., Skorik V.G., Bunyaeva E.V., Fokin D.S. Povshenie koeffitsienta moshchnosti vypryamitel'no-invertornogo preobrazovatelya elektrovoza peremennogo toka v rezhimakh tyagi i rekupeativnogo tormozheniya [Increasing the power factor of the rectifier-inverter converter of an AC electric locomotive in traction and regenerative braking modes]. *Elektronika i ehlektrooborudovanie transporta* [Electronics and electrical equipment of transport]. 2011, no 1 (20), pp. 2-5.
21. Vlas'evskii S.V., Skorik V.G. Vliyanie raboty oborudovaniya elektrovozov peremennogo toka na kachestvo elektrohnergii v tyagovoi seti zheleznykh dorog [Influence of operation of the equipment of AC electric locomotives on the quality of electricity in the traction network of railways]. Khabarovsk: DVGUPS Publ., 2010. 103 p.
22. Vlas'evskii S.V., Skorik V.G., Suprun D.A., Bunyaeva E.V., Blazhnov A.I. Sistema opredeleniya povrezhdenii v silovom preobrazovatelye elektrovoza peremennogo toka v rezhime tyagi [System for determining damage in the power converter of an AC electric locomotive in traction mode]. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Scientific notes of the Komsomolsk-on-Amur State Technical University]. 2020, no 5 (45), pp. 71-77.

### Информация об авторах

**Супрун Демьян Андреевич**, преподаватель кафедры электротехники, электроники и электромеханики, Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, e-mail: suprun.demyan@mail.ru

**Скорик Виталий Геннадьевич**, канд. техн. наук, заведующий кафедрой электротехники, электроники и электромеханики, Дальневосточный государственный университет путей сообщения, г. Хабаровск, e-mail: skorik@festu.khv.ru

### Information about the authors

**Demyan A. Suprun**, lecturer of the Department «Electrical Engineering, Electronics and Electromechanics», Far Eastern State Transport University, Khabarovsk, e-mail: suprun.demyan@mail.ru

**Vitaliy G. Skorik**, Ph.D. in Engineering Science, Head of the Department «Electrical Engineering, Electronics and Electromechanics», Far Eastern State Transport University, Khabarovsk, e-mail: skorik@festu.khv.ru