

Введение во фракционный анализ сингулярных («жестких») систем дифференциальных уравнений, представляющих материальные объекты железнодорожного транспорта

В.А. Нехаев¹✉, В.А. Николаев¹, Е.Г. Леоненко²

¹Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, Российская Федерация

²Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск, Российская Федерация

✉nehaevva@rambler.ru

Резюме

Довольно часто в науке, да и в транспортной механике тоже, мы сталкиваемся с явлением, когда аргумент некоторой функции чрезвычайно мал, а ее значение при этом весьма велико, но их произведение все же ограничено по величине. Такие математические модели или системы дифференциальных уравнений называют «жесткими». Их численное интегрирование требует применения специальных методов, например, метода Гира, иначе потребуются затратить очень много «машинного» времени. Хотя и в этом случае правильный результат не гарантирован. Академик Российской академии наук А.Н. Тихонов доказал теорему о разделении движения динамической системы на «быстрые» и «медленные» составляющие, которая при корректном ее применении обеспечивает заданную точность решения, а ее основу составляют всего пять условий. По образному и меткому выражению профессора Московского государственного университета И.В. Новожилова, исследователь сначала как бы смотрит в телескоп и видит изменение «медленных» переменных, а затем – в микроскоп и, очевидно, видит «быстрые» составляющие. К сожалению, теоретический материал, посвященный данной теореме, в основном публикуется математиками в соответствующих журналах на определенном уровне. Инженеры, выпускаемые техническими вузами, не обладают математическими знаниями в том объеме, который необходим для понимания тихоновской теоремы, хотя с задачами, требующими ее применения, в жизни встречаются довольно часто. Большие усилия к внедрению этой теоремы в приложения были затрачены профессором И.В. Новожиловым, опубликовавшим несколько монографий по этому вопросу. В настоящей статье делается попытка с инженерной, методической точки зрения рассмотреть решение известной, и, конечно же, решенной задачи Стокса. Получено точное и приближенные решения и проведено их сравнение.

Ключевые слова

система дифференциальных уравнений, сингулярно и регулярно возмущенная математическая модель, спектр-системы, асимптотический метод, фракционный анализ, предельная асимптотическая модель, «быстрые» и «медленные» составляющие, размерные и безразмерные переменные

Для цитирования

Нехаев В.А. Введение во фракционный анализ сингулярных («жестких») систем дифференциальных уравнений, представляющих материальные объекты железнодорожного транспорта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 2(74). – С. 33–46. – DOI 10.26731/1813-9108.2022.2(74).33-46.

Информация о статье

поступила в редакцию: 19.04.2022 г.; поступила после рецензирования: 6.06.2022 г.; принята к публикации 7.06.2022 г.

Introduction to fractional analysis of singular («rigid») systems of differential equations representing material objects of railway transport

V.A. Nekhaev¹✉, V.A. Nikolaev¹, E.G. Leonenko²

¹Omsk State Transport University, Omsk, the Russian Federation

²Krasnoyarsk Rail Transport Institute, a branch of Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk, the Russian Federation

✉nehaevva@rambler.ru

Abstract

Quite often in science, as well as in transport mechanics, one faces a phenomenon in which the argument of some function is extremely small, while its value is very large, but their product is still limited in size. Such mathematical models or systems of differential equations are called «rigid». Their numerical integration requires the use of special methods, like a Gear method; otherwise, it may take too much «machine» time. Although in this case the correct result is not guaranteed either. Academician of the Russian Academy of Sciences A.N. Tikhonov proved a theorem on separating the motion of a dynamic system into «fast» and «slow» components, which, if applied correctly, guarantees a given accuracy of the solution, its basis being made up of only 5 conditions. According to the figurative and apt expression of the professor of Moscow State University I.V. Novozhilov, it's as

if the researcher first looks through a telescope seeing a change in «slow» variables and then, looking through a microscope, obviously sees «fast» components. Unfortunately, the theoretical material devoted to this theorem is mainly published by mathematicians in the corresponding journals at the appropriate level. Engineers graduating from technical universities do not have the necessary body of mathematical knowledge to understand the Tikhonov's theorem, although in life they often face problems requiring its application. Great efforts to introduce this theorem into applications were spent by Professor of Moscow State University I.V. Novozhilov, who published several monographs on this issue. In this article, an attempt is made from an engineering, methodological point of view to consider the solution of the well-known, and, of course, solved, Stokes problem. Exact and approximate solutions are obtained and compared.

Keywords

system of differential equations, singularly and regularly perturbed mathematical model, spectrum systems, asymptotic method, fractional analysis, limiting asymptotic model, «fast» and «slow» components, dimensional and dimensionless variables

For citation

Nekhaev V.A., Nikolaev V.A., Leonenko E.G. Vvedenie vo fraktsionnyi analiz singulyarnykh («zhestkikh») sistem differentsial'nykh uravnenii, predstavlyayushchikh material'nye ob"ekty zheleznodorozhnogo transporta [Introduction to fractional analysis of singular or «rigid» systems of differential equations representing material objects of railway transport]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, no. 2(74), pp. 33–46. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.2(74).33-46.

Article info

Received: April 19, 2022; received: June 6, 2022; accepted: June 7, 2022.

Введение

В реальной жизни часто приходится иметь дело с такими системами дифференциальных уравнений, которые считаются «жесткими». Другими словами, когда в составе сил, действующих на систему, имеется такая сила, что даже при малых аргументах она обладает очень большими значениями, но ее произведение на аргумент, все же, является некоторой ограниченной величиной. Встречаются и задачи, спектр составляющих которых сильно разнесен, когда численное интегрирование требует чрезвычайно малого шага интегрирования и, как следствие, большого количества машинного времени. Иногда требуется разработка некоей предельной асимптотической математической модели сложного физического объекта, например, гироскопа.

Физическим примером таких систем является проблема взаимодействия колеса подвижного состава и железнодорожного пути. Численное интегрирование таких дифференциальных уравнений требует специальных методов решения, например, способ Гира либо их предварительную математическую обработку. К последней относится так называемый фракционный анализ [1]. Он как бы позволяет смотреть на процесс эволюции системы, описываемой системой сингулярных дифференциальных уравнений, сначала в микроскоп. Тогда мы можем обнаружить малые и быстрые флуктуации решения, но не увидим в целом перспективы развития решения. А если обратиться к теле-

скопу, то малых и быстрых флуктуаций мы не увидим, но точно определим медленные изменения поведения системы на большом промежутке времени.

Развивается теория сингулярно возмущенных систем, в основном, математиками, их работы разбросаны по периодической литературе и обычно начинаются фразой «рассмотрим систему дифференциальных уравнений, содержащую малые параметры где-то либо слева при производных, либо справа при правых частях». В действительности в наших исследованиях мы не обнаруживаем таких готовых уравнений, поэтому часто инженерами вводится малый параметр искусственно, чтобы воспользоваться готовым рецептом или решением, полагая затем его равным единице [2–8]. При таком подходе возникает вопрос о сходимости получаемых рядов, например, при $\mu = 1$ они могут оказаться расходящимися.

Пример решения

Далее рассматривается достаточно простой пример (так называемая задача Стокса), решаемый с помощью известной теоремы академика А.Н. Тихонова о разделении движений динамической системы на «быстрые» и «медленные» составляющие. Эта теорема содержит пять условий, при выполнении которых гарантировано получение решения и его точность.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(y, z, t, \mu); y(0) = y_0 \\ \mu \frac{dz}{dt} = Z(y, z, t, \mu); \mu \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь y и z соответственно n - и m -мерные векторы. Положив $\mu = 0$ и, естественно, опустив z_0 , получим из (1) вырожденную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(y, z, t, \mu); y(0) = y_0 \\ 0 = Z(y, z, t, \mu); \mu \ll 1. \end{cases} \quad (2)$$

Нужно ответить на вопрос о близости решений систем (1) и (2), который решается с помощью теоремы академика А.Н. Тихонова.

Примем следующие допущения:

1. Функции $Y = (y, t, z, \mu)$ и $Z = (y, z, t, \mu)$ аналитичны по y, z, t, μ в некоторой области пространства переменных.

2. Уравнение $Z = (y, z, t, 0) = 0$ имеет корень $z = \varphi(y, t)$ в некоторой ограниченной области D изменения переменных y, t , и этот корень – изолированный.

3. Функция $Y = (y, \varphi(y, t), 0)$ аналитична по y, t .

4. Начальные условия z_0 лежат в области влияния корня $z = \varphi(y, t)$ системы $\frac{dz}{dt} Z(y, z, t, 0)$.

5. Точка покоя $z = \varphi(y, t)$ системы $\frac{dz}{dt} Z(y, z, t, 0)$ является асимптотически устойчивой по Ляпунову для всех y, t , для которых определен корень уравнения $Z(y, z, t, 0) = 0$. Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ решение системы (1) существует, единственно и удовлетворяет предельным равенствам:

$$\begin{cases} \lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \text{ npu } 0 \leq t \leq t_0; \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \bar{z}(t) \text{ npu } 0 \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

где $0 \leq t \leq t_0$ – ограниченный, лежащий внутри области D интервал времени, на котором существует единственное решение системы (1). В область $0 \leq t \leq t_0$ для z не входит нулевая точка. Это исключает пограничный слой бесконечно малой протяженности, где разность $\|z - \bar{z}\|$ велика.

Обсуждение условий теоремы можно обнаружить в [5, 6, 9–12]. Отмечается, что для нелинейных систем принципиально важным

является последнее, пятое условие. Если условия теоремы дополнить замечанием профессора Московского государственного университета И.В. Новожилова, что теорему Тихонова можно использовать для исследования неавтономных динамических систем, у которых «быстрые» собственные составляющие движения имеют затухающий характер, а воздействия на систему, зависящие явно от времени, – медленные функции.

Рассмотрим физический пример движения шарика в вязкой жидкости (задача Стокса). Шарик падает в вязкую жидкость, которая, в свою очередь, оказывает сопротивление его движению, равное $R = kV$, где k – коэффициент пропорциональности, определяемый, вообще говоря, вводимыми идеализациями. Материальная точка – это идеализация некоторого твердого тела, когда его размеры не существенны для решения задачи. Если взять твердое тело, то оно может вращаться вокруг своего центра масс, а так как жидкость вязкая, то некоторая ее часть, несомненно, будет вовлечена во вращение, тогда при определенных условиях за шариком могут образоваться отрывающиеся от него вихри, следовательно, задача существенным образом усложнится, но наша цель заключается не в том, чтобы точнее описать движение шарика, а в том, чтобы проиллюстрировать методику применения фракционного анализа, поэтому простейшая уже принятая нами идеализация считается корректной и справедливой). При решении задачи примем следующие обозначения: V – скорость движения, m – масса шарика, h – высота сосуда с жидкостью. Необходимо найти решение при тривиальных начальных условиях.

Уравнения движения шарика описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = V; \\ m \frac{dV}{dT} = mg - kV, \end{cases} \quad (3)$$

где заглавными буквами обозначены размерные физические величины (переменные задачи): X – вертикальное перемещение шарика, T – время, V – скорость движения шарика (а маленькими буквами в дальнейшем будем обозначать безразмерные величины).

Точные решения

Нами специально была выбрана задача, имеющая точные решения, с которыми можно сравнивать приближенное решение, получаемое с помощью фракционного анализа. Интегрирование системы (3) начнем со второго уравнения, которое с помощью метода разделения переменных сначала приведем к виду:

$$\frac{dV}{mg - kV} = \frac{dT}{m};$$

или

$$\int_0^V \frac{dV}{mg - kV} = \frac{1}{m} \int_0^T dT \quad (4)$$

В (4) все интегралы являются табличными и поэтому легко вычисляются, в результате получим:

$$V = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}T}). \quad (5)$$

Отсюда находим (подставляя (5) в первое дифференциальное уравнение системы (3)):

$$\frac{dX}{dT} = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}T}).$$

Вновь разделяем переменные:

$$\int_0^X dX = \frac{mg}{k} \int_0^T (1 - e^{-\frac{k}{m}T}) dT.$$

Вычисляем интегралы и получаем закон для перемещения шарика:

$$X = \frac{mg}{k} \left[T - \frac{m}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}T}) \right];$$

или

$$X = \frac{mg}{k} T - \frac{m}{k} V.$$

Таким образом, точные решения системы дифференциальных уравнений таковы:

$$\begin{cases} V = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}T}); \\ X = \frac{mg}{k} T - \frac{m}{k} V. \end{cases} \quad (6)$$

Определим размерности наших переменных:

$$k = \left[\frac{\kappa \Gamma c}{m} \right]; \quad m = \left[\frac{\kappa \Gamma c \cdot c^2}{m} \right]; \quad g = \left[\frac{M}{c^2} \right]; \quad \frac{m}{k} = [c];$$

$$\frac{mg}{k} = \left[\frac{M}{c} \right].$$

Изучая окончательные размерности, трудно установить, что отношение массы шарика к коэффициенту пропорциональности для

сопротивления движению измеряется в секундах, это есть постоянная времени системы, которую обозначим через T_2 . Если предположить, что шарик падает достаточно долго и поэтому устанавливается некоторая предельная скорость падения, то имеем:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = 0; \\ mg - kV_\infty = 0, \end{cases}$$

тогда:

$$\begin{cases} T_2 = \frac{m}{k}; \\ V_\infty = \frac{mg}{k} = gT_2, \end{cases}$$

Следовательно, уравнения (6) теперь можно записать в виде:

$$\begin{cases} V = V_\infty (1 - e^{-\frac{k}{m}T}); \\ X = V_\infty T - VT_2. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть при $T = T_1$ $X = h$, т.е. имеем:

$$\begin{cases} h = V_\infty T_1 - VT_2; \quad h = V_\infty T_1 - V_\infty \left(1 - e^{-\frac{T_1}{T_2}} \right) T_2; \\ \frac{h}{V_\infty T_2} = \frac{T_1}{T_2} - 1 + e^{-\frac{T_1}{T_2}}; \quad \frac{h}{V_\infty T_2} + 1 - e^{-\frac{T_1}{T_2}} = \frac{T_1}{T_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Последнее уравнение в системе (8) является нелинейным относительно постоянной времени T_1 и поэтому оно может быть разрешено либо графическим способом, либо приближенным способом, например, разложением экспоненты в ряд Тейлора, при ограничении тремя членами ряда, если высота сосуда небольшая:

$$\frac{h}{V_\infty T_2} - \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 = 0;$$

или

$$T_1 \cong T_2 \sqrt{\frac{2h}{V_\infty T_2}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (9)$$

Если же предположить, что шарик падает в безвоздушном пространстве, то его движение является равноускоренным и, следовательно, запишем:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2} g T_1^2; \\ T_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{cases} \quad (10)$$

Сравнение формулы (9), полученной разложением экспоненты в ряд с сохранением трех

членов, и второго выражения системы (10) указывает на их полную идентичность. Отсюда следует вывод, что постоянную времени системы T_1 можно оценивать, используя простейшую расчетную схему. Это характерно для асимптотических и приближенных методов.

Приближенные решения

Следуя алгоритму фракционного анализа, проведем нормализацию уравнений движения шарика (3):

$$t = \frac{T}{T_*}; x = \frac{X}{X_*}; v = \frac{V}{V_*}, \quad (11)$$

здесь T_* , X_* , V_* – некоторые характерные величины, от выбора которых априори зависит класс исследуемого движения. Подставляя вместо T , X , V их значения, определяемые соотношениями (11), получим:

$$\begin{cases} \frac{X_*}{V_* T_*} \frac{dx}{dt} = v; \\ \frac{V_*}{g T_*} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{k V_*}{mg} v. \end{cases} \quad (12)$$

Для оценки характерных постоянных времени системы используем, как нам рекомендует фракционный анализ, простейшие грубые математические модели (ибо задача состоит в оценке не самих величин переменных, а их порядков). Пусть среда не оказывает сопротивления падению шарика, тогда второе уравнение системы (3) может быть переписано так:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} = g; V = gT; \\ T = \frac{V_*}{g}. \end{cases}$$

Теперь предположим, что на шарик действует только сила сопротивления, т.е. второе дифференциальное уравнение системы (4) будет иметь вид:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dT} = -kV; \int \frac{dV}{V} = -\frac{k}{m} \int dT; \\ \ln \left| \frac{V}{C_1} \right| = -\frac{k}{m} T; V = C_1 e^{-\frac{k}{m} T} = C_1 e^{-\frac{T}{T_2}}; \\ T_2 = \frac{m}{k}. \end{cases} \quad (13)$$

Последнее выражение в системе (13) и есть еще одна искомая постоянная времени системы. Введем также другую постоянную времени системы, равную:

$$T_3 = \frac{X_*}{V_*}.$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений (12) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{T_3}{T_*} \frac{dx}{dt} = v; \\ \frac{T_*}{T_*} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{T_1}{T_2} v. \end{cases} \quad (14)$$

Теперь все зависит от выбора двух конкретных величин T_* и V_* , именно их выбор и будет выделять для рассмотрения соответствующие классы движений системы.

1. Случай движения в «малом».

Обратимся к случаю малого трения, когда процесс изменения скорости шарика определяется силой тяжести. $T_1 = \frac{X_*}{g}$ – характерное

время изменения скорости шарика за счет силы тяжести; $T_2 = \frac{m}{k}$ – характерное время изменения скорости шарика за счет силы трения;

$T_3 = \frac{X_*}{V_*} = \frac{h}{V_*}$ – характерное время падения ша-

рика на дно сосуда. «Быстрые» движения происходят во временном масштабе T_1 , поэтому выберем $T_* = T_1$, тогда:

$$\begin{cases} \frac{T_3}{T_1} \frac{dx}{dt} = v; \\ \frac{dv}{dt} = 1 - \mu v, \end{cases} \quad (15)$$

здесь $\mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1$ – малый параметр, безраз-

мерная величина; $\lambda = \frac{T_1}{T_2} \gg 1$ – большой пара-

метр, безразмерная величина. Разделим первое уравнение системы (15) на большой параметр, получим:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu_1 v; \\ \frac{dv}{dt} = 1 - \mu_2 v, \end{cases} \quad (16)$$

где $\mu_1 = \frac{T_1}{T_3}$, $\mu_2 = \frac{T_1}{T_2}$ – два малых параметра, значительно меньше 1. Первый малый параметр можно привести к виду:

$$\mu_1 = \frac{T_1 T_2}{T_2 T_3} = \mu \varepsilon,$$

здесь $\varepsilon = T_1/T_3$ – новый малый параметр. Подставляя (15) в (16), находим для исследования на временном интервале T_1 систему дифференциальных уравнений с малыми параметрами при правых частях:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon \mu v; \\ \frac{dv}{dt} = 1 - \mu v. \end{cases} \quad (17)$$

решение которой можно искать методом Пуанкаре, т.е. с помощью рядов по малому параметру, например, для v :

$$\begin{cases} v = v^{(0)} + \mu v^{(1)} + \mu^2 v^{(2)} + \mu^3 v^{(3)} + \dots; \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dv^{(0)}}{dt} + \mu \frac{dv^{(1)}}{dt} + \mu^2 \frac{dv^{(2)}}{dt} + \mu^3 \frac{dv^{(3)}}{dt} + \dots, \end{cases} \quad (18)$$

следовательно, получаем:

$$\begin{cases} \frac{dv^{(0)}}{dt} = 0; v^{(0)}(0) = v_0; \\ \frac{dv^{(1)}}{dt} = -v^{(0)}; v^{(1)}(0) = 0; \\ \frac{dv^{(2)}}{dt} = -v^{(1)}; v^{(2)}(0) = 0; \\ \dots \end{cases} \quad (19)$$

Интегрируя последовательно систему дифференциальных уравнений (19), находим решения:

$$\begin{cases} \frac{dv^{(0)}}{dt} = 1; v^{(0)} = v_0 + t; \\ \frac{dv^{(1)}}{dt} = -v^{(0)} - t; v^{(1)} = -v_0 t - \frac{1}{2} t^2; \\ \frac{dv^{(2)}}{dt} = v_0 t + \frac{1}{2} t^2; v^{(2)} = \frac{1}{2} v_0 t^2 + \frac{1}{6} t^3; \\ \dots \end{cases}$$

общий член ряда (18) будет таким:

$$v^{(k)} = (-1)^k \left[v_0 \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right],$$

в результате решение второго уравнения системы (17) можно записать так:

$$v = v_0 \left(1 - \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2!} - \dots \right) + \left(t - \frac{\mu t^2}{2!} + \frac{\mu^2 t^3}{3!} - \dots \right). \quad (20)$$

Если вспомнить, что разложение показательной функции в ряд Тейлора имеет вид:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

то нетрудно показать, что ряд (20) сходится к следующей функции:

$$v = v_0 e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu t}), \quad (21)$$

которая является решением второго дифференциального уравнения системы (17). Нужно здесь отметить, что получение асимптотическим методом некоторой конечной функции – это скорее исключение (ибо далеко не всегда удается построить весь ряд (18)), чем правило.

Если же в (21) вернуться к размерным единицам, приняв $v_0 = 0$, что следует из начальных условий задачи, то:

$$\begin{cases} v = \frac{T_2}{T_1} \left(1 - e^{-\frac{T_1}{T_2}} \right); \\ \frac{V}{V_*} = \frac{mg}{kV_*} \left(1 - e^{-\frac{T}{T_2}} \right); V = V_\infty \left(1 - e^{-\frac{T}{T_2}} \right). \end{cases} \quad (22)$$

Сравнивая последнее выражение системы (22) с первой формулой (7), констатируем их полное совпадение.

Запишем формулы для трех приближений в размерных единицах, чтобы нанести их на график:

$$\begin{cases} \frac{V^{(0)}}{V_\infty} = \frac{T}{T_1}; \\ \frac{V^{(1)}}{V_\infty} = \frac{T}{T_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_2} \right)^2; \\ \frac{V^{(2)}}{V_\infty} = \frac{T}{T_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{T}{T_2} \right)^3; \\ \frac{V^{(3)}}{V} = \frac{T}{T_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{T}{T_2} \right)^3 - \frac{1}{24} \left(\frac{T}{T_2} \right)^4. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены графики точного и приближенного решений исходной задачи (задача Стокса). Чем больше членов ряда мы принимаем в расчет, тем точнее на больших интервалах времени представляется решение. Приближенные решения достаточно близки к точному лишь на интервале времени $\mu t \ll 1$, т.е. при $T \ll T_2$. Для большого времени $T \gg T_2$ и расхождение между точным и приближенным

решениями становится большой величиной. Этот факт является естественным для асимптотических методов решения дифференциальных уравнений. Расчеты были выполнены для следующих исходных данных: $g = 9,805 \text{ м/с}^2$; $m = 2 \text{ кгс}\cdot\text{с}^2/\text{м}$; $k = 0,2 \text{ кгс}\cdot\text{с}/\text{м}$; $h = 20 \text{ м}$. Постоянные времени задачи равны: $T_1 = 2,02 \text{ с}$; $T_2 = 10 \text{ с}$; $T_3 = 0,204 \text{ с}$, $V_\infty = 98,05 \text{ м/с}$.

2. Случай движения в «большом». Рассмотрим класс движения в «большом», когда характерная скорость V_* равна установившейся скорости падения:

$$\begin{cases} mg - kV_* = 0; \\ V_* = V_\infty = \frac{mg}{k}, \end{cases}$$

а характерное время $T_* = T_3$, тогда вместо (14) получим:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v; \mu \frac{dv}{dt} = 1 - v; \\ \mu = \frac{T_1}{T_3} \ll 1. \end{cases} \quad (23)$$

Покажем, что в случае $T_1/T_2 = 1$:

$$T_1 = \frac{V_*}{g} = \frac{mg}{kg} = \frac{m}{k} = T_2.$$

«Вырожденная» система для (23) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v; x(0) = x_0; \\ 0 = 1 - v; v(0) = v_0, \end{cases}$$

отсюда, в частности, следует:

$$\begin{cases} v^0 = 1; \\ \frac{dx}{dt} = v^0; \\ x = x_0 + v^{(0)}t. \end{cases} \quad (24)$$

Чтобы доказать справедливость вырождения, будем действовать согласно алгоритму теоремы академика А.Н. Тихонова и рассмотрим «присоединенную» систему:

$$\frac{dv}{d\tau} = 1 - v,$$

которая должна обязательно обладать устойчивостью по отношению к малым возмущениям:

$$\begin{cases} v = v^{(0)} + \Delta v; v^{(0)} = 1; \\ \frac{dv^{(0)}}{d\tau} + \frac{d\Delta v}{d\tau} = 1 - v^{(0)} - \Delta v; \\ \frac{d\Delta v}{d\tau} = -\Delta v. \end{cases}$$

Другими словами, для малого возмущения мы имеем затухающее решение:

$$\Delta v = C_1 e^{-\tau},$$

или при $\tau \rightarrow \infty$, $\Delta v \rightarrow 0$, $v \rightarrow v^{(0)}$. Следовательно, приближенное решение (24) на ограниченном отрезке времени справедливо с заданной точностью.

Учет «пограничного» слоя

Для того чтобы удовлетворить второму начальному условию, построим пограничную функцию вида:

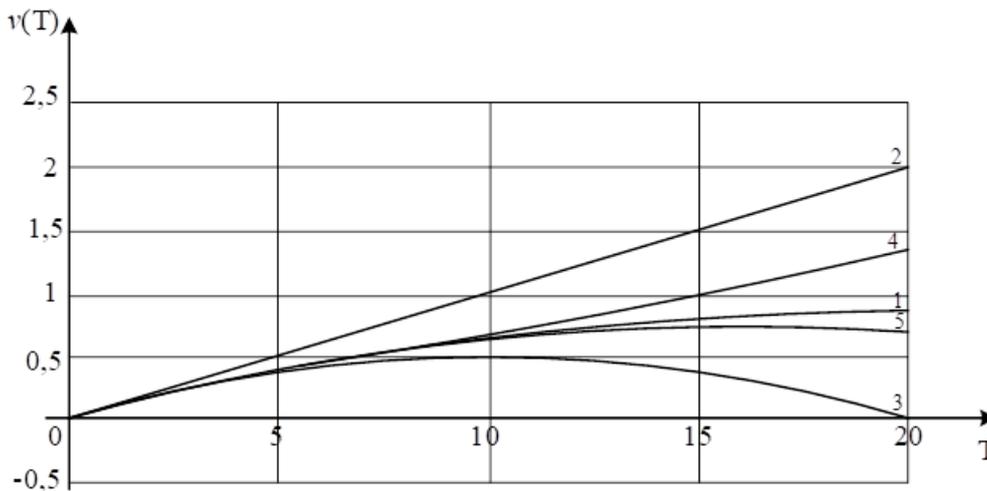


Рис. 1. Приближенные и точное решение задачи:

1 – точное решение; 2 – первое приближение; 3 – второе приближение; 4 – третье приближение; 5 – четвертое приближение

Fig. 1. Approximate and exact solution of the problem:

1 – exact solution; 2 – first approximation; 3 – second approximation; 4 – third approximation; 5 – fourth approximation

$$v = v^{(0)} + v_n,$$

т.е. приближенное решение более высокого порядка составляем из разложений вне пограничного слоя и внутри него. Решение вне пограничного слоя зависит от «медленного» времени t , а внутри пограничного слоя – от «быстрого» времени τ :

$$\mu \left(\frac{dv^{(0)}}{dt} + \frac{dv_n}{d\tau} \right) = 1 - v^{(0)} - v_n, \quad (25)$$

но (25) должно удовлетворять второму начальному условию:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v^{(0)} + v_n(0); \\ v_n(0) = v_0 - v^{(0)}; \\ \frac{dv^{(0)}}{d\tau} = 0; \\ \frac{dv_n}{d\tau} = 1 - v^{(0)} - v_n; \\ v_n = v_n(0)e^{-\tau} = (v_0 - 1)e^{-\tau}, \end{array} \right.$$

таким образом, мы построили следующее приближение:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t; \\ v = 1 + (v_0 - 1)e^{-\tau}, \end{array} \right.$$

однако, в нашей задаче справедливо $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$, следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t; \\ v = 1 - e^{-\tau}. \end{array} \right.$$

Если же мы хотим вычислить медленную составляющую $x(t)$ с более высокой точностью, то нужно изучить еще одну «возмущенную» систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v^{(0)} + v_n = 1 + (v_0 - 1)e^{-\tau}; \\ \frac{dv_n}{d\tau} = -v_n. \end{array} \right. \quad (26)$$

Прямое интегрирование (26) встречает очевидные затруднения, так как производная функции v_n велика. Поэтому примем:

$$x = x^{(0)} + z,$$

и линеаризуем систему относительно z и v_n , т.е.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{dx^{(0)}}{dt} + \frac{dz}{dt}; \\ \frac{dz}{dt} = v_n = (v_0 - 1)e^{-v}; \\ z = \mu(e^{-\frac{t}{\mu}} - 1); x = t - \mu + \mu e^{-\frac{t}{\mu}}. \end{array} \right.$$

Окончательно, напишем следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t - \mu + \mu e^{-\frac{t}{\mu}}; \\ v = 1 - e^{-\frac{t}{\mu}}. \end{array} \right. \quad (27)$$

Точное решение (см. систему (6) второе уравнение), выраженное в безразмерных единицах:

$$x = t - \mu(1 - e^{-\frac{t}{\mu}})$$

абсолютно совпадает с приближенным решением (см. систему (27) первое выражение).

Из представленного здесь решения задачи можно сделать такой вывод, что при учете пограничного слоя приближенные и точные решения полностью совпадают, т.е. теорема академика А.Н. Тихонова о разделении движения системы на «быстрые» и «медленные» составляющие при «больших» временах дала возможность получить точное решение. Конечно, легкость иллюстрации применения теоремы А.Н. Тихонова в данном случае объясняется тем, что был выбран простой пример. Для нелинейных систем находится асимптотика для решений и это часто бывает важно.

Сегодня совсем нетрудно обнаружить целый спектр работ математиков-прикладников по решению различных задач с помощью теоремы о разделении движения системы на «быстрые» и «медленные» составляющие [9–20].

Обратимся к «железнодорожному» примеру, касающемуся тяги поездов, упростив до предела расчетную схему (рис. 2).

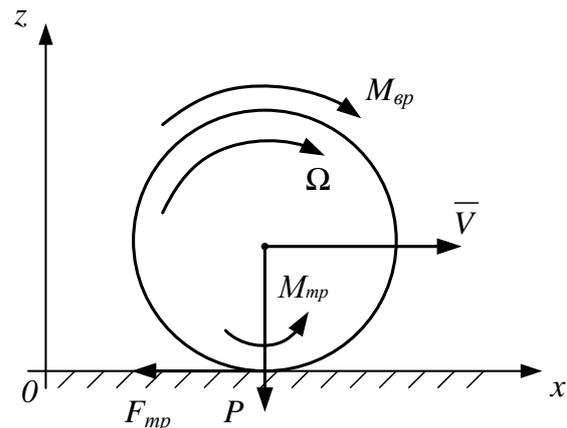


Рис. 2. Простейшая расчетная схема колесной пары для решения некоторых вопросов тяги поездов

Fig. 2. The simplest design scheme of a wheel pair for solving some issues of train traction

Уравнения движения расчетной схемы колесной пары получены с помощью общих теорем динамических систем:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dT} = F_{\text{тр}} - W(V); \\ 0 = N - P - mg; \\ J \frac{d\Omega}{dT} = M_{\text{вр}} - M_{\text{тр}} - rF_{\text{тр}}, \end{cases} \quad (28)$$

где m – масса колеса; $F_{\text{тр}}$ – сила сухого трения; N – нормальная реакция опорной плоскости; P – нагрузка на колесо; J – момент инерции колеса относительно оси вращения; $M_{\text{вр}}$ – вращающий момент, приложенный к колесу (типом тягового электродвигателя пока пренебрегаем); $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения в подшипнике скольжения; r – радиус колеса, g – ускорение свободного падения; V – скорость движения центра масс колеса; Ω – угловая скорость вращения колеса вокруг собственной оси.

Если воспользоваться законом Амонтона–Кулона (в настоящее время широко используемого в технике), т. е. $F_{\text{тр}} = F_0 \cdot \text{sign}(U)$, здесь $U = \Omega r - V$ – скорость проскальзывания колеса по опорной плоскости; F_0 – максимальная сила сухого трения, то система дифференциальных уравнений (28) является системой с разрывной правой частью, исследование которой является довольно сложным делом. При $U > 0$ осуществляется режим разгона, при $U < 0$ возникает режим торможения, а при $U = 0$ колесо движется с постоянным ускорением вдоль опорной поверхности и скорость центра масс колеса изменяется по закону, если считать вращающий момент и момент сил трения постоянными величинами, т. е. происходит равноускоренное движение (в этом случае точка касания колеса и опорной поверхности является мгновенным центром скорости), пройденный катком путь вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2m} \frac{M_{\text{вр}} - M_{\text{тр}}}{r} \frac{r^2 + \rho^2}{r} T^2. \text{ Конечно же, эти}$$

результаты являются следствием упрощений реальной физической системы. Как подвижная единица наша динамическая система обязана испытывать сопротивление движению внешней среды, чем мы на первых порах пренебрегли.

Целью является установление факта: удержится ли система на этой связи или нет, и как это происходит. Другими словами, не совершается ли данная система фрикционные автоколебания? Из теории тяги поездов известно,

что колесная пара может двигаться либо без колебаний, либо совершать периодические пробуксовки, либо просто буксовать.

В соответствии с требованиями теоремы академика А.Н. Тихонова о разделении движения динамической системы на «быстрые» и «медленные» составляющие преобразуем систему (28) так:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dT} = F_{\text{тр}} - W(V); \\ \left(\frac{\rho^2}{r} \right) m \frac{dU}{dT} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right] F - \frac{M_{\text{вр}} - M_{\text{тр}}}{r}, \end{cases}$$

где ρ – радиус инерции колеса, $F_0 = f(P + mg)$ – сила трения, U – проскальзывание колеса по опорной поверхности. Второе уравнение системы (28) позволило вычислить нормальное давление колеса на опорную поверхность.

Допустим далее, что скорость движения центра масс колеса V изменяется существенно медленнее, чем скорость проскальзывания колеса по опорной поверхности U , что обычно имеет место в действительности (например, скорость центра масс поезда сколь-нибудь существенным образом изменяется за десятки секунд, а скорость вращения колесных пар за десятые доли секунды). Следовательно, скорость V является в нашей задаче медленной переменной, а скорость проскальзывания U – быстрой переменной.

Нормализуем систему уравнений (28), приняв $V = vV_*$, $U = uU_*$, $T = tT_*$:

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_*} \frac{dv}{dt} = \text{sign } u; \\ \frac{T_2}{T_*} \frac{du}{dt} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right] \text{sign } u - a, \end{cases} \quad (29)$$

здесь постоянные времени равны: $T_1 = mV_*/F_0$

, $T_2 = (\rho/r)^2 mU_*/F_0$, V_* и U_* – характерные переменные, которые определяют классы движения принятой динамической системы,

$a = (M_{\text{0вр}} - M_{\text{0тр}})/rF_0$ – постоянная величина при условии, что вращающий момент и максимальная сила сухого трения являются постоянными величинами. В теории тяги поездов характерные величины V_* и U_* связаны известным соотношением $U_* = \xi V_*$, где $\xi = 0,001$ –

0,025. Тогда вторая постоянная времени будет вычисляться по выражению:

$$T_2 = \xi(\rho/r)^2 T_1, \quad (30)$$

а система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_*} \frac{dv}{dt} = \text{sign } u; \\ \xi \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{T_2}{T_*} \frac{du}{dt} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right] \text{sign } u - a, \end{cases} \quad (31)$$

Очевидно, что структура дифференциальных уравнений будет меняться в зависимости от выбора характерного времени T_* . Если взять $T_* \ll T_1$, то система (31) запишется так:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mu \text{sign } u; \\ \frac{du}{dt} = \mu \left\{ \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right] \text{sign } u - a \right\} \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \frac{1}{\xi}. \end{cases} \quad (32)$$

Система, разумеется, является регулярно возмущенной с малым параметром в правых частях, т. е. $\mu = T_*/T_1 \ll 1$, и для нее можно строить асимптотические разложения по малому параметру. Если принять, что $T_* = T_1$, то для исследования получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mu \text{sign } u; \\ \xi \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{du}{dt} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right] \text{sign } u - a. \end{cases} \quad (33)$$

Какой вид решения нужно строить в данном случае зависит от коэффициента $\xi(\rho/r)^2$, если он существенно меньше единицы, то левую часть второго уравнения считать равной нулю, тогда получаем:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{r^2}{r^2 + \rho^2} a; \\ \text{sign}(u) = \frac{r^2}{r^2 + \rho^2} - a. \end{cases} \quad (34)$$

Следовательно, безразмерная переменная легко находится и равна:

$$v = v_0 + \frac{r^2}{r^2 + \rho^2} at.$$

Причем система дифференциальных уравнений (33) является сингулярно возмущенной. Конечно же, возникает вопрос об устойчивости решения (34) и на это отвечает теорема академика А.Н. Тихонова, но об этом будет

сказано далее. Третий вариант системы дифференциальных уравнений возникает тогда, когда $T_* \gg T_1$:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dv}{dt} = \text{sign } u; \\ \xi \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \varepsilon \frac{du}{dt} = \left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right] \text{sign } u - a, \end{cases}$$

где $\varepsilon = T_1/T_* \ll 1$ – малый параметр.

В данном примере сила тяги представлялась силой сухого трения, но у профессора С.М. Куценко [21] был другой подход, на базе которого в [22] на основе лабораторных материалов [23] получено регрессионное уравнение:

$$F_k = a F_{\text{тр}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{кр}}} \right)^b e^{-c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{кр}}}}, \quad (35)$$

где $F_{\text{тр}} = f_0 P_{\text{ст}}$.

График изменения силы тяги, вычисляемой по уравнению регрессии (35) представлен на рис. 3.

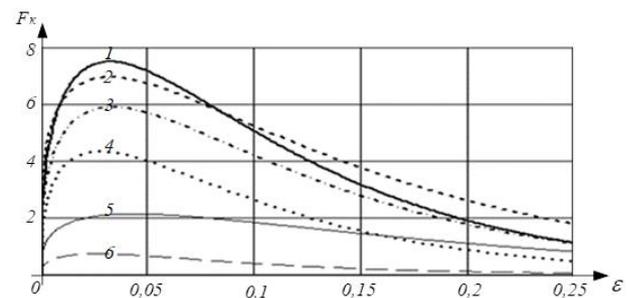


Рис. 3. Сила тяги локомотива:

- 1 – для сухого чистого рельса с подачей песка;
- 2 – для сухого обезжиренного рельса;
- 3 – для сухого чистого рельса;
- 4 – для мокрого рельса с подачей песка;
- 5 – для чистого рельса, политого водой;
- 6 – для рельсов, покрытых тонким слоем смазки трансмиссионных передач

Fig. 3. Locomotive traction force:

- 1 – for dry clean rail with sand supply;
- 2 – for dry decontaminated rail;
- 3 – for dry clean rail;
- 4 – for wet rail with sand supply;
- 5 – for clean rail poured with water;
- 6 – for rails covered with a thin layer of transmission gear lubricant

На падающих ветвях силы тяги локомотива, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{кр}}$, возникает и развивается боксование колесной пары. Коэффициенты a , b , c и $\varepsilon_{\text{кр}}$ определены для различных условий контактирования колесной пары с рельсами с использованием уравнения (22) и приведены в табл. 1. Для сухого чистого рельса находим, что мак-

симальная сила тяги одной колесной пары локомотива составляет около 5,8 тс.

При проведении экспериментальных исследований с поездами, ведомыми ВЛ-10 или ВЛ-11, Л.А. Мугинштейн нашел максимальное значение равное 0,252, а О.А. Некрасов для ВЛ-80, ВЛ-60 – 0,265. Эти результаты хорошо коррелируются с данными, представленными в табл. 2.

Укажем на следующий известный факт, представленный в докладе Академии наук РФ за 2009 г., в котором обновлено понимание силы сухого трения. Сотрудниками академика В.Ф. Журавлёва были выполнены соответствующие лабораторные исследования по двухкомпонентному сухому трению, когда к исследуемому объекту прикладывались горизонтальная сила и вращающий момент, а применение аппроксимации Падэ позволило получить соответствующие регрессионные выражения [24–29]. Прошло почти 14 лет, но научные сотрудники железнодорожного транспорта в своей практике этим не пользуются. В транспортной механике данный подход принципиально важен, ибо к колесной паре кроме горизонтальной силы тяги еще приложен и вращающий момент тягового двигателя.

Другие примеры можно обнаружить в работах [14, 17, 18, 22], которые имеют достаточно большой объем и их изучение может помочь читателю в овладении математическими аспек-

тами теоремы академика А.Н. Тихонова. Анализ статей, посвященных динамике подвижного состава железных дорог, позволяет авторам прогнозировать смену парадигмы математических моделей с обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными (или случайными) коэффициентами. Эти дифференциальные уравнения не изучаются в технических вузах. Всем железнодорожникам известно – вертикальная жесткость пути переменная по длине рельсового звена (рис. 4), но до сих пор корректно этот факт не учитывался, что совершенно неправильно. При движении колесной пары экипажа по такому пути она будет совершать колебательные движения. Когда жесткость пути постоянна, то никаких движений колесная пара совершать не будет – это принципиально неправильно. В дальнейшем необходимо разрабатывать методику решения таких задач, так как высшая математика не предлагает нам регулярных методов их интегрирования.

Заключение

Исследуемая динамическая система должна содержать весь спектр переменных, часто для «быстрых» составляющих задачи дифференциальные уравнения приходится выводить из (3), например, сила взаимодействия колеса с рельсом определяется их псевдоскольжением друг

Табл. 1. Коэффициенты регрессионного уравнения (22)

Table 1. Coefficients of the regression equation (22)

Условия на контакте колеса с рельсом	a	b	c	$\epsilon_{кр}$	$f_{сч\ max}/f_0$	Коэффициент корреляции
Сухой чистый рельс с подачей песка	0,88454	0,41034	0,40645	0,032	0,5891	0,99264
Сухой обезжиренный рельс	0,72771	0,28755	0,28888	0,032	0,5451	0,99767
Сухой чистый рельс	0,71693	0,37933	0,37605	0,033	0,4922	0,9955
Мокрый рельс с подачей песка	0,62734	0,38389	0,37349	0,027	0,4318	0,97756
Чистый рельс, политый водой	0,35161	0,32744	0,33716	0,045	0,2510	0,99737
Рельс, покрытый тонким слоем смазки трансмиссионных передач	0,24823	0,43601	0,43151	0,026	0,1612	0,9824

Таблица 2. Значение потенциального коэффициента сцепления колеса с рельсом

Table 2. The potential coefficient value of wheel to the rail cohesion

Условия контактирования колеса с рельсом	Ψ_{\max}
Сухой чистый рельс с подачей песка	0,300
Сухой обезжиренный рельс	0,278
Сухой чистый рельс	0,236
Мокрый рельс с подачей песка	0,173
Чистый рельс, политый водой	0,085
Рельс, покрытый тонким слоем смазки трансмиссионных передач	0,029

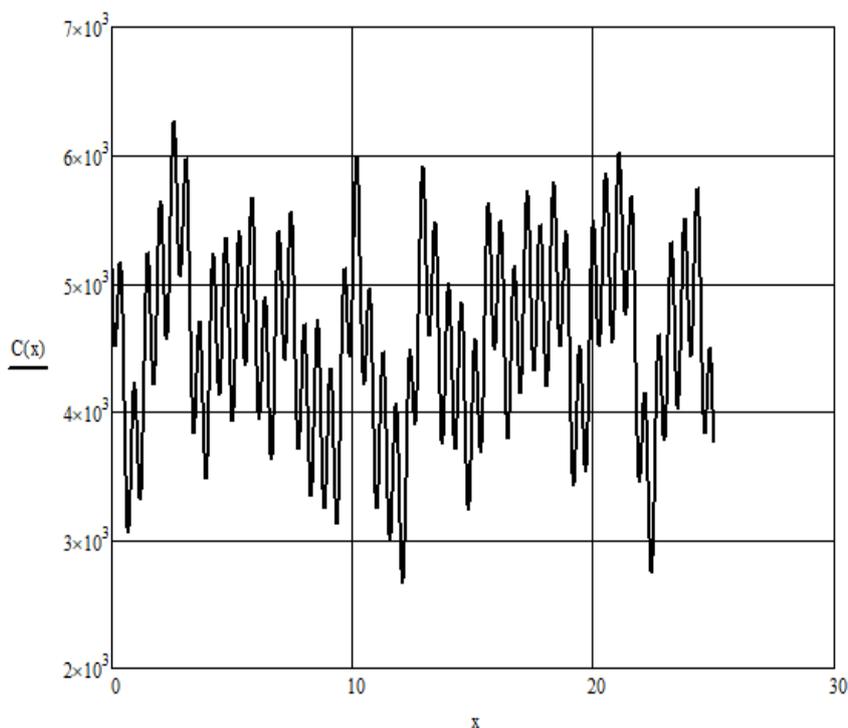


Рис. 4. Вертикальная жесткость железнодорожного пути в Сибирском регионе (средняя жесткость на звене составляет 4560 летом), тс/м

Fig. 4. Vertical rigidity of the railway track in the Siberian region (the average rigidity on the link is 4560 in summer), ts/m

по другу. Для данной переменной обычно нет дифференциального уравнения, его необходимо вывести из исходной системы, чтобы привести заданную систему к виду (1).

Использование теоремы академика А.Н. Тихонова о разделении движений динамической системы на «медленные» и «быстрые» составляющие позволяет после вырождения

точной системы, получить динамическую систему меньшей размерности. Причем даже при использовании численных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений их математическая проработка позволит принять большой шаг интегрирования, что уменьшит затраты «машинного» времени.

Список литературы

1. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы. М. : Мир, 1968. 302 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1968. 464 с.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М. : Наука, 1975. 247 с.
4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.
5. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575 –586.
6. Васильева А.Б., Бутусов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. : Наука, 1973. 272 с.
7. Красовский Н.Н., Климушев А.И. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 3. С. 680 – 690.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51. № 1. С. 99 – 128.
9. Новожилов И.В. Приближенные методы исследования динамических систем. М. : МЭИ, 1980. 47 с.
10. Новожилов И.В. Методы разделения движений. М. : МЭИ, 1981. 48 р.
11. Новожилов И.В. Теория размерности и приближенные методы. М. : МЭИ, 1987. 76 с.
12. Новожилов И.В. Приближенные методы исследования гироскопических систем. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М. : МЭИ, 1973. 456 с.

13. Градштейн И.С. О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Математический сборник. 1953. Т. 32. С. 533 – 544.
14. Капустина О.М., Новожилов И.В. Разделение движений в динамике экипажа с неконтактной подвеской // Межвузовский тематический сборник. 1983. № 16. С. 36 – 42.
15. Брагин В.В., Новожилов И.В., Пшеничкина Л.А. Об устойчивости трехосного индикаторного гиросtabilизатора // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 6. С. 26 – 33.
16. Новожилов И.В. Предельная модель системы с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. 1988. № 4. С. 24–27.
17. Новожилов И.В. Разделение движений рельсового экипажа // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1980. № 1. С. 55 – 59.
18. Копылов И.А., Новожилов И.В. Поперечные колебания железнодорожного поезда // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 4. С. 64–70.
19. Новожилов И.В. Условия застоя в системах с кулоновым трением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 1. С. 8 – 14.
20. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М. : МГУ, 1991. 188 с.
21. Игнатенко В.П., Куценко С.М., Гулякина Т.В. О характере сил трения в контакте катящегося по направляющей колеса // Вестник Харьк. политехнич. ин-та. 1985. № 99. С. 39–41.
22. Нехаев В.А. Оптимизация режимов ведения поезда с учетом критериев безопасности движения (методы и алгоритмы) : дис. ... док-ра техн. наук. Омск, 2000. 356 с.
23. Голубенко А.Л. Сцепление колеса с рельсом. Киев : Віпол, 1993. 448 с.
24. Журавлёв В.Ф. О модели сухого трения в задаче о качения твердых тел // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. № 5. С. 762–767.
25. Киреевков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 60–67.
26. Киреевков А.А. Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 3. С. 48–53.
27. Журавлёв В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 81–88.
28. Иванов А.П. О движении плоских тел при наличии трения покоя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 89–94.
29. Журавлёв В.Ф., Киреевков А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 192–202.

References

1. Kline S. J. Podobie i priblizhennye metody [Similitude and approximation methods]. Moscow: Mir Publ., 1968. 302 p.
2. Vazov W. Asimptoticheskie razlozheniya reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Asymptotic expansions for ordinary differential equations]. Moscow: Mir Publ., 1968. 464 p.
3. Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Differentsial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya [Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 247 p.
4. Tikhonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]. Moscow: Nauka, 1985. 231 p.
5. Tikhonov A.N. Sistemy differentsial'nykh uravnenii, sodержashchie malye parametry pri proizvodnykh [Systems of differential equations containing small parameters at derivatives]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1952, vol. 31(73), no. 3, pp. 575 – 586.
6. Vasil'eva A.B., Butusov V.F. Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 272 p.
7. Krasovskii N.N., Klimushev A.I. Ravn timer naya asimptoticheskaya ustoichivost' sistem differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh [Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter at higher derivatives]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1963, vol. 18, no. 3, pp. 680-690.
8. Filippov A.F. Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu [Differential equations with a discontinuous right-hand side]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1960, vol. 51, no. 1, pp. 99-128.
9. Novozhilov I.V. Priblizhennye metody issledovaniya dinamicheskikh sistem [Approximate methods for studying dynamical systems]. Moscow: MEI Publ., 1980. 47 p.
10. Novozhilov I.V. Metody razdeleniya dvizhenii [Methods of separation of movements]. Moscow: MEI, 1981. 48 p.
11. Novozhilov I.V. Teoriya razmernosti i priblizhennye metody [Dimension theory and approximate methods]. Moscow: MEI Publ., 1987. 76 p.
12. Novozhilov I.V. Priblizhennye metody issledovaniya giroskopicheskikh sistem. Razvitie mekhaniki giroskopicheskikh i inertial'nykh sistem [Approximate Methods for Studying Gyroscopic Systems. Development of the mechanics of gyroscopic and inertial systems]. Moscow: MEI Publ., 1973. 456 p.
13. Gradshtein I.S. O resheniyakh na vremennoi polupryamoi differentsial'nykh uravnenii s malymi mnozhitelyami pri proizvodnykh [On solutions on the time half-line of differential equations with small factors at derivatives]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1953, vol. 32, pp. 533-544.

14. Kapustina O.M., Novozhilov I.V. Razdelenie dvizhenii v dinamike ekipazha s nekontaktnoi podveskoi [Separation of movements in the dynamics of a vehicle with non-contact suspension]. *Mezhvuzovskii tematiceskii sbornik* [Interuniversity thematic proceedings], 1983, no. 16, pp. 36-42.
15. Bragin V.V., Novozhilov I.V., Pshenichkina L.A. Ob ustoychivosti trekhosnogo indikatornogo girostabilizatora [On the stability of a triaxial indicator gyrostabilizer]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of Academy of Sciences USSR. Mechanics of Solids], 1969, no. 6, pp. 26-33.
16. Novozhilov I.V. Predel'naya model' sistemy s uprugimi elementami bol'shoi zhestkosti [Limit model of a system with elastic elements of high rigidity]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of Academy of Sciences USSR], 1988, no. 4, pp. 24-27.
17. Novozhilov I.V. Razdelenie dvizhenii rel'sovogo ekipazha [Separation of motions of a rail vehicle]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of Academy of Sciences USSR. Mechanics of Solids], 1980, no. 1, pp. 55-59.
18. Kopylov I.A., Novozhilov I.V. Poperechnye kolebaniya zheleznodorozhnogo poezda [Transverse vibrations of a railway train]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of Academy of Sciences USSR. Mechanics of Solids], 1985, no. 4, pp. 64-70.
19. Novozhilov I.V. Usloviya zastoya v sistemakh s kulonovym treniem [Stagnation Conditions in Systems with Coulomb Friction]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of Academy of Sciences USSR. Mechanics of Solids], 1973, no. 1, pp. 8-14.
20. Novozhilov I.V. Fraktsionnyi analiz [Fractional analysis]. Moscow: MGU Publ., 1991. 188 p.
21. Ignatenko V.P., Kutsenko S.M., Gulyakina T.V. O kharaktere sil treniya v kontakte katyashchegosya po napravlyayushchei kolese [On the nature of the friction forces in contact of the wheel rolling along the guide]. *Vestnik Khar'kovskogo politekhnicheskogo instituta* [Bulletin of the Kharkiv Polytechnic Institute], 1985, no. 99, pp. 39 – 41.
22. Nekhaev V.A. Optimizatsiya rezhimov vedeniya poezda s uchetom kriteriev bezopasnosti dvizheniya (metody i algoritmy) [Optimization of train driving modes taking into account traffic safety criteria (methods and algorithms)]. Doctor's thesis. Omsk, 2000. 356 p.
23. Golubenko A.L. Stseplenie kolese s rel'som [Wheel coupling with rail]. Kiev: Vipol Publ., 1993. 448 p.
24. Zhuravlev V.F. O modeli suhogo treniya v zadache o kachenii tverdykh tel [On the dry friction model in the rolling problem of solids]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1998, vol. 62, no. 5, pp. 762 – 767.
25. Kireenkov A.A. O dvizhenii odnorodnogo vrashchayushchegosya diska po ploskosti v usloviyakh kombinirovannogo treniya [On the motion of a homogeneous rotating disk along a plane under conditions of combined friction]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the Russian Academic Science. Mechanics of Solids], 2002, no. 1, pp. 60-67.
26. Kireenkov A.A. Metod vychisleniya sily treniya i momenta sil treniya v kombinirovannoi modeli sukhogo treniya dlya krugovykh ploshchadok kontakta [A method for calculating the friction force and the moment of friction forces in a combined dry friction model for circular contact pads]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the Russian Academic Science. Mechanics of Solids], 2003, no. 3, pp. 48 – 53.
27. Zhuravlev V.F. Zakonomernosti treniya pri kombinatsii skol'zheniya i vercheniya [Regularities of friction in the combination of sliding and twisting]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the Russian Academic Science. Mechanics of Solids], 2003, no. 4, pp. 81 – 88.
28. Ivanov A.P. O dvizhenii ploskikh tel pri nalichii treniya pokoya [On the motion of flat bodies in the presence of rest friction]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the Russian Academic Science. Mechanics of Solids], 2003, no. 4, pp. 89 – 94.
29. Zhuravlev V.F., Kireenkov A.A. O razlozheniyakh Padi v zadache o dvumernom kulonovskom trenii [On Pad decompositions in the problem of two-dimensional Coulomb friction]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the Russian Academic Science. Mechanics of Solids], 2005, no. 2, pp. 192 – 202.

Информация об авторах

Нехаев Виктор Алексеевич, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, e-mail: nehaevva@rambler.ru.

Николаев Виктор Александрович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, e-mail: NikolaevVA@omgups.ru.

Леоненко Елена Геннадьевна, преподаватель электромеханического отделения, Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск, e-mail: leonenko-eg@mail.ru.

Information about the authors

Viktor A. Nekhaev, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Omsk State Transport University, Omsk; e-mail: nehaevva@rambler.ru.

Viktor A. Nikolaev, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Omsk State Transport University, Omsk; e-mail: NikolaevVA@omgups.ru.

Elena G. Leonenko, Lecturer of the Department of Electromechanics, Krasnoyarsk Rail Transport Institute, a branch of Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk, e-mail: leonenko-eg@mail.ru.