

## Движение электровоза ЭП2К по неравноупругому железнодорожному пути без геометрических неровностей на поверхности катания рельсов

В.А. Нехаев<sup>1</sup>✉, В.А. Николаев<sup>1</sup>, Е.Г. Леоненко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, Российская Федерация

<sup>2</sup>Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск, Российская Федерация

✉nehaevva@rambler.ru

### Резюме

Целью представленного научного исследования является технико-экономическая оценка направлений по повышению В статье указывается на необходимость смены парадигмы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающими в настоящее время динамику подвижного состава железных дорог, на дифференциальные уравнения с переменными (случайными или периодическими) коэффициентами. Вертикальная жесткость железнодорожного пути в условиях дискретной инерционной модели не является постоянной величиной и может быть аппроксимирована рядом Фурье со 128 членами. Авторы нашли возможность ограничиться пятью членами. Рассмотрена задача взаимодействия неподдрессированной массы локомотива и неравноупругого по протяженности пути, который позволит определить все переменные значения, в том числе и ускорения. Главной причиной колебаний колесной пары, движущейся по идеальному (без геометрических неровностей) пути, является его неравноупругость. Показано, что если бы путь был равноупругим по протяженности, то подвижной состав на таком пути не совершал бы колебаний. Поэтому была выведена математическая модель динамического поведения кузова локомотива, тележки и колесной пары. Расчеты производились для локомотива ЭП2К. Исследовано влияние неравноупругости пути на ускорение подпрыгивания кузова электровоза, тележки и колесной пары. Установлено, что максимальное ускорение колесной пары локомотива при движении по неравноупругому пути с увеличением скорости возрастает от 0,36 до 0,6g, т. е. почти в два раза. Определены экспертные оценки критических скоростей для тележки, колесной пары и кузова локомотива, часть из которых находится в зоне эксплуатационных скоростей.

### Ключевые слова

железнодорожный путь, динамика подвижного состава, неравноупругость железнодорожного пути, обобщенные определители Хилла, нормальная форма Коши, локомотив ЭП2К, критические скорости экипажа

### Для цитирования

Нехаев В.А. Движение электровоза ЭП2К по неравноупругому железнодорожному пути без геометрических неровностей на поверхности катания рельсов / В.А. Нехаев, В.А. Николаев, Е.Г. Леоненко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 3 (75). – С. 159–170. – DOI 10.26731/1813-9108.2022.3(75).159-170.

### Информация о статье

поступила в редакцию: 12.09.2022 г.; поступила после рецензирования: 20.09.2022 г.; принята к публикации: 21.09.2022 г.

## Movement of the EP2K electric locomotive along an unevenly elastic railway track without geometric irregularities on the rail rolling surface

V.A. Nekhaev<sup>1</sup>✉, V.A. Nikolaev<sup>1</sup>, E.G. Leonenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Omsk State Transport University, Omsk, the Russian Federation

<sup>2</sup>Krasnoyarsk Rail Transport Institute, a branch of Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk, the Russian Federation

✉nehaevva@rambler.ru

### Abstract

The article points out the need to change the paradigm of differential equations with constant coefficients, which currently describe the dynamics of the railway rolling stock, for differential equations with variable (random or periodic) coefficients. The vertical stiffness of a railway track under the conditions of a discrete inertial model is not a constant value and can be approximated by a Fourier series with 128 terms. We found it possible to limit ourselves to 5 members. The problem of interaction between the unsprung mass of a locomotive and a track that is unequally elastic along its length is considered, which will make it possible to determine all variable values, including accelerations. The main reason for vibrations of a wheel set moving along an ideal (without geometric irregularities) track is its non-uniform elasticity. It is shown that if the track were equally elastic in length, then the rolling stock on such a track would not oscillate. Therefore, a mathematical model of the dynamic behavior of the locomotive body, bogie and wheelset was derived. The calculations were made for the EP2K locomotive. The influence of non-uniform elasticity of the track on the bouncing acceleration of the locomotive body, bogie and wheelset is considered. It has been established that the maximum acceleration of the locomotive wheelset when moving along an unequally elastic track increases

from 0.36g to 0.6g with increasing speed, i.e. almost 2 times. Expert estimates of critical speeds for the bogie, wheelset and locomotive body are found, some of which are in the zone of operational speeds.

### Keywords

railway track, dynamics of rolling stock, unevenly elastic of railway track, generalized Hill determinants, Cauchy normal form, EP2K locomotive, critical crew speeds

### For citation

Nekhaev V.A., Nikolaev V.A., Leonenko E.G. Dvizhenie elektrovoza EP2K po neravnouprugomu zheleznodorozhnomu puti bez geometricheskikh nerovnostei na poverkhnosti kataniya rel'sov [Movement of the electric locomotive EP2K along an unevenly elastic railway track without geometric irregularities on the rail rolling surface]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovaniye* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, no. 3 (75), pp. 159–170. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.3(75).159-170.

### Article Info

Received: September 12, 2022; Revised: September 20, 2022; Accepted: September 21, 2022.

### Введение

Экспериментальные исследования вертикальной жесткости железнодорожных путей в Сибирском регионе указывают на непостоянство ее величины по протяженности рельсового звена, что приводит исследователей динамики подвижного состава к применению обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (рис. 1).

Средняя величина жесткости пути вычислялась с помощью определенного интеграла и усреднялась по длине рельсового звена – 5 764,674 тс/м. Для вывода математической модели условного одноосного обобщенного электровоза ЭП2К использовалась дискретная инерционная модель пути. С применением энергетического метода Лагранжа второго рода получено:

$$A \ddot{z} + B \dot{z} + C(x)z = \vec{P}, \quad (1)$$

где  $A = \begin{pmatrix} M_k & 0 & 0 \\ 0 & M_T & 0 \\ 0 & 0 & M_{kn} \end{pmatrix}$  – матрица инерционных

коэффициентов электровоза;

$B = \begin{pmatrix} \beta_u & -\beta_u & 0 \\ -\beta_u & \beta_u + \beta_\sigma & -\beta_u \\ 0 & -\beta_\sigma & \beta_\sigma + \beta_n \end{pmatrix}$  – матрица диссипативных

коэффициентов электровоза;

$C(x) = \begin{pmatrix} c_u & -c_u & 0 \\ -c_u & c_u + c_\sigma & -c_\sigma \\ 0 & -c_\sigma & c_\sigma + c_n(x) \end{pmatrix}$  – матрица

жесткостных коэффициентов электровоза;

$\vec{P} = \begin{pmatrix} M_k \\ M_T \\ M_{kn} \end{pmatrix} g$  – вектор весовых нагрузок на электровоз.

Найденная система дифференциальных уравнений (1) по стандартному алгоритму [1] была приведена к нормальной форме Коши (этого требуют практически все численные методы интегрирования дифференциальных уравнений):

В дифференциальном уравнении (2) приняты следующие величины:  $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{P} \end{pmatrix}$  – вектор

(размерности  $6 \times 1$ ) сил тяжести, действующих на электровоз;  $G(x) = \begin{pmatrix} O & E \\ -A^{-1}C(x) & -A^{-1}B \end{pmatrix}$  – матрица Коши;  $O$  – нулевая матрица размерности ( $3 \times 3$  в нашем случае);  $x = \frac{Vt}{3,6}$  – координата,

определяющая положение электровоза на железнодорожном пути, м;  $V$  – скорость движения электровоза, км/ч;  $t$  – время, с; 3,6 – переводной коэффициент скорости движения из км/ч в м/с;  $E$  – единичная матрица размерности  $3 \times 3$ ;

$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \dot{\vec{z}} \end{pmatrix}$  – новый вектор обобщенных координат размерности  $6 \times 1$ .

Так называемые параметрические колебания динамических систем, когда какие-либо из параметров зависят, например, от времени, исследовались многими авторами [2–6]. На железнодорожном транспорте большой вклад в изучение параметрических колебаний был внесен И.С. Леванковым и другими исследователями [7–20]. Известно, что системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами не обладают регулярными

методами их интегрирования. Поэтому часто ученым приходится прибегать либо к приближенным, либо численным методам.

Эти дифференциальные уравнения обладают рядом особенностей, главная из которых заключается в расширении такого важного понятия, как резонанс. В классическом понимании – это совпадение какой-либо собственной частоты с частотой вынуждающей силы. В случае параметрической системы под резонансом уже понимается не конкретное значение, а некоторая область значений, причем их количество является счетным множеством. Однако практическое значение имеют две-три зоны динамической неустойчивости (параметрического резонанса) [21]. В теории колебаний таких систем принято различать простые и комбинационные области параметрического резонанса, последние не возникают в консервативных динамических системах, а их ширина возрастает с увеличением диссипативных сил. В областях параметрического резонанса решения динамической системы экспоненциально растут или затухают, причем они разделяются периодическими решениями. Следовательно, последние являются границами областей параметрических резонансов. Отсюда очевидно, что не получится построить их численным интегрированием дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

### Расчет динамических составляющих, действующих на элементы механической части электровоза ЭП2К при движении по неравноупругому пути

В качестве исследуемого объекта возьмем электровоз ЭП2К. Для вычисления собственных частот электровоза в случае отсутствия диссипативных сил воспользуемся стан-

дартной функцией *Mathcad eigenvals*( $A^{-1}C_0$ ). При наличии сил вязкого трения применим матрицу Коши, т. е. *eigenvals*( $G(0)$ ). Результаты представлены в табл. 1.

Изучение результатов (см. табл. 1) позволяет утверждать, что частоты подпрыгивания кузова, тележки и колесной пары отличаются друг от друга в консервативном и диссипативном случаях несущественно. Наибольшая ошибка касается колесной пары электровоза и составляет 4,4 %. Рассмотрение логарифмического коэффициента затухания свободных колебаний  $\delta$  указывает на следующий факт – кузов электровоза демпфирован слабо, тележка электровоза лишь немного недодемпфирована (если считать нормой значение этого показателя в пределах 0,2–0,4), колесная пара демпфирована нормально. Малость диссипативных сил электровоза проверялась по критерию, предложенному в [1]:

$$\frac{\text{norme}[(A^{-1}B)^2]}{\text{norme}(A^{-1}C)} = 0,359. \quad (3)$$

Нормы матриц вычислялись по Эвклиду с помощью стандартной функции математического пакета *Mathcad norme* (...). Сравнение полученного с помощью (3) результата с последней колонкой в табл. 1 позволяет утверждать, что диссипативные силы электровоза ЭП2К являются малыми.

Так как вертикальная жесткость железнодорожного пути (см. рис 1) содержит скрытые периодичности, то вычислим критические скорости движения электровоза ЭП2К (табл. 2).

Из табл. 2 вытекает вывод, что в зону эксплуатационных скоростей движения поездов (40–120 км/ч) попадают одна – для кузова, две – для тележки и одна – для колесной пары. Эти скорости были вычислены исходя из условия,

Таблица 1. Значения частот в консервативном и диссипативном случаях

Table 1. Frequency values in conservative and dissipative cases

Элементы электровоза Locomotive elements	Консервативный случай Conservative case		Диссипативный случай $\delta = n / k_0$ Dissipative case	
	рад/с	Гц	рад/с	б/п
Кузов Body	9,907	1,577	9,910	0,053
Тележка Bogie	37,869	6,027	37,576	0,113
Колесная пара Wheelset	139,734	22,239	133,846	0,299

Таблица 2. Критические скорости движения электровоза по неравноупругому пути

Table 2. Critical speeds of an electric locomotive along an unevenly elastic path

Элементы электровоза Locomotive elements	Критические скорости движения электровоза, км/ч Critical locomotive speeds, km/h			
	Кузов Body	40,53	30,31	16,23
Тележка Bogie	154,92	115,86	62,05	23,61
Колесная пара Wheelset	–	–	–	87,11

что на спектральной плотности вертикальной жесткости пути обнаружены скрытые периодичности со следующими длинами волн (табл. 3).

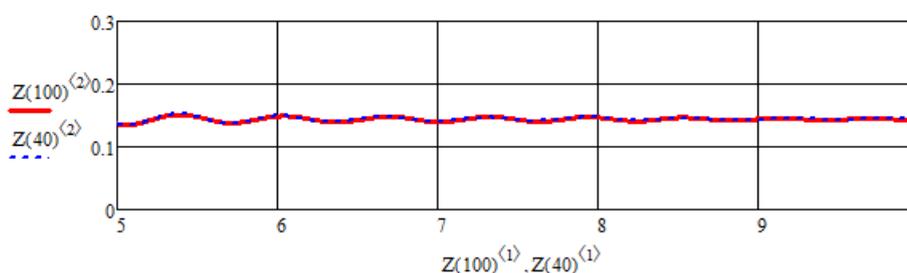
Необходимо отметить, что длина пятой составляющей хорошо коррелируется с

междушпальным расстоянием. В районе критических скоростей в виде клиньев будут развиваться области параметрических резонансов.

Результаты математического моделирования динамики электровоза ЭП2К показаны

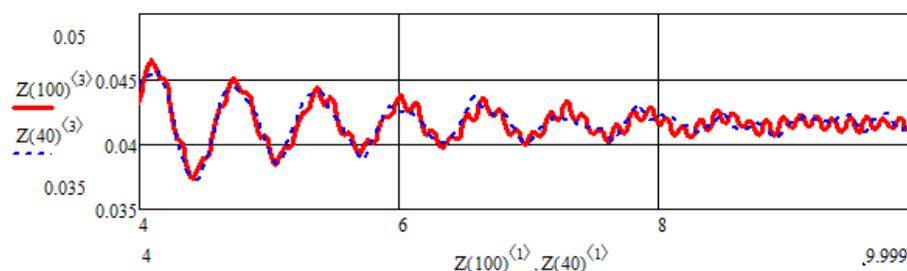
**Таблица 3.** Длины волн скрытых периодических составляющих  
**Table 3.** Wavelengths of hidden periodic components

№ составляющей # of the component	Длина волны, м Wavelength, m
1	15,620
2	3,570
3	2,670
4	1,430
5	0,544



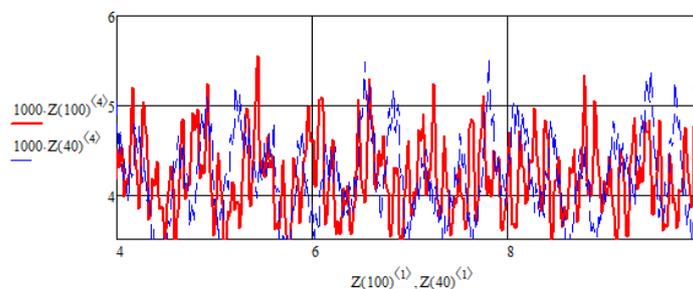
**Рис. 2.** Подпрыгивание кузова электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, м (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 2.** Bouncing of the EP2K electric locomotive body when moving along an ideal but unevenly path, m (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)



**Рис. 3.** Подпрыгивание тележки электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, м (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 3.** Bouncing of the bogie of the electric locomotive EP2K when moving along an ideal, but unevenly elastic track, m (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)



**Рис. 4.** Подпрыгивание колесной пары электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, м (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

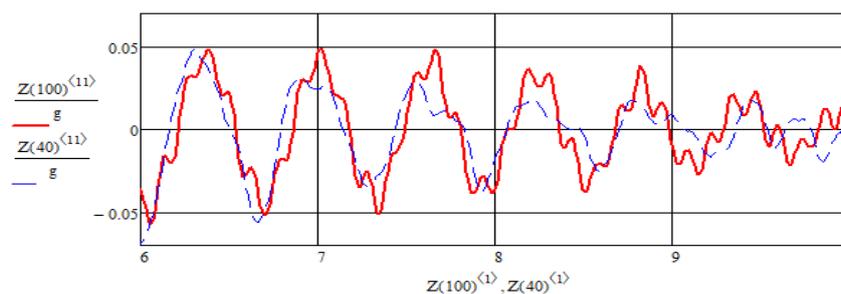
**Fig. 4.** Bouncing of the wheelset of the electric locomotive EP2K when moving along an ideal, but unevenly elastic track, m

ниже на рис. 2–10. Рис. 2–4 указывают на то, что чем дальше узел электровоза от железнодорожного пути, тем в меньшей степени он отзывается на неравноупругость пути.

Ускорения подпрыгивания соответствующих узлов электровоза ЭП2К отличаются друг от друга несколько больше, чем перемещения. Можно приближенно полагать, что подпрыгивание кузова электровоза от скорости его движения практически не зависит. Подпры-

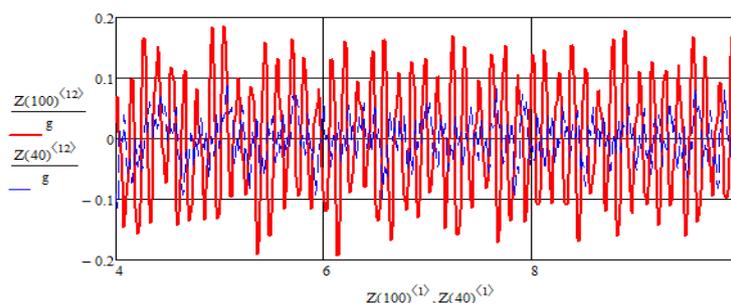
гивание тележки имеет немного большую амплитуду колебания.

Графики, показанные на рис. 2–4, указывают на то, что перемещения частей электровоза ЭП2К нельзя считать гармоническими, поэтому необходим спектральный анализ. Для экспертной оценки воспользуемся размахом амплитуд кузова, тележки и колесной пары. По рис. 5 понятно, что ускорения подпрыгивания кузова электровоза при скорости 40 и 100 км/ч



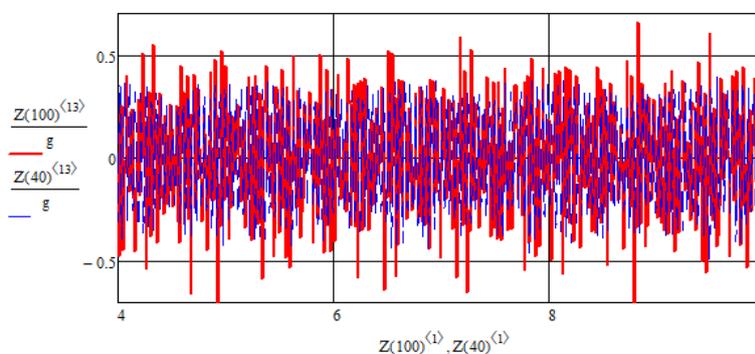
**Рис. 5.** Ускорение подпрыгивания кузова электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, в долях  $g$  (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 5.** Acceleration of bouncing of the EP2K electric locomotive body when moving along an ideal, but unevenly elastic track, in fractions of  $g$  (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)



**Рис. 6.** Ускорение подпрыгивания тележки электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, в долях  $g$  (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 6.** Acceleration of bouncing of the EP2K electric locomotive bogie when moving along an ideal, but unevenly elastic path, in fractions of  $g$  (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)



**Рис. 7.** Ускорение подпрыгивания колесной пары электровоза ЭП2К при движении по идеальному, но неравноупругому пути, в долях  $g$  (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

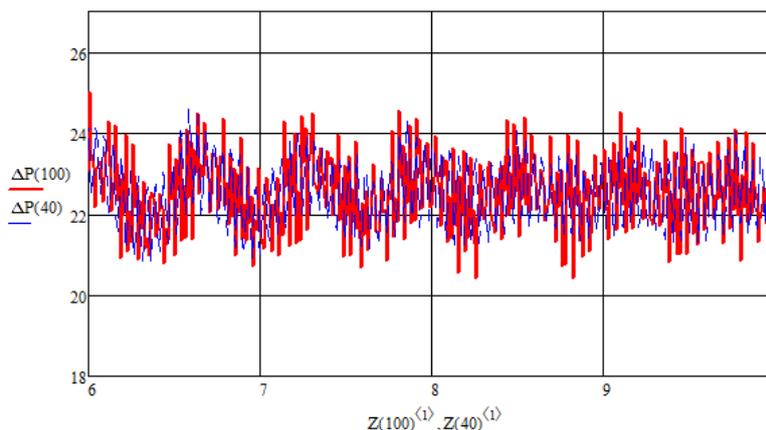
**Fig. 7.** Acceleration of bouncing of the wheelset of the electric locomotive EP2K when moving along an ideal, but unevenly elastic track, in fractions of  $g$  (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)

совпадают. Объяснить это можно только высокими фильтрующими свойствами подвешивания электровоза.

Максимальные значения ускорения колесной пары электровоза находятся в пределах 0,4–0,6g (при  $V = 40\text{--}100$  км/ч), т. е. ускорение колесной пары электровоза не очень большое при движении по неравноупругому пути. С возрастанием неравноупругости оно будет увеличиваться.

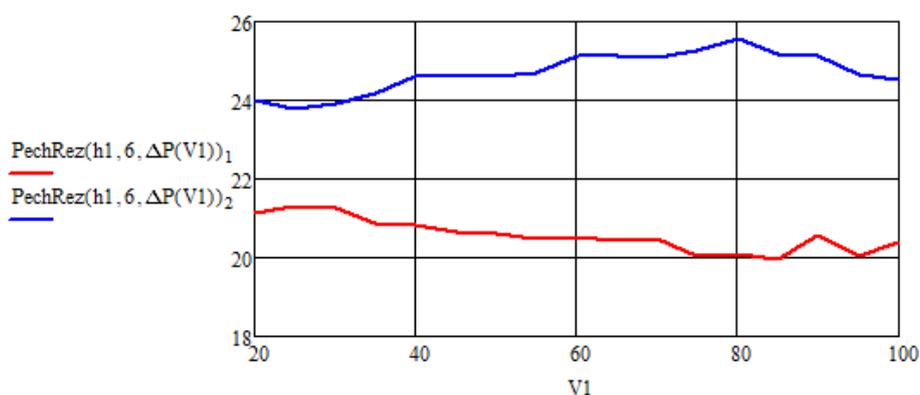
Вид полученных реализаций для давления на неравноупругий путь требует спектрального анализа, чтобы сделать вывод о том, какая составляющая неравноупругого пути является наиболее опасной с точки зрения безопасности движения поездов.

Среднее давление электровоза на железнодорожный путь показано в табл. 4. Вычисления среднего давления выполнялись по формуле:



**Рис. 8.** Давление электровоза ЭП2К на путь при движении по идеальному, но неравноупругому пути (тс) (красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 8.** Pressure of the electric locomotive EP2K on the track when moving along an ideal, but unevenly elastic track (ts) (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)



**Рис. 9.** Размах давления электровоза ЭП2К на путь при движении по идеальному, но неравноупругому пути (тс)

(красная кривая – скорость 100 км/ч; синяя кривая – скорость 40 км/ч)

**Fig. 9.** The pressure range of the electric locomotive EP2K on the track when moving along an ideal, but unevenly elastic track (ts) (red curve – speed 100 km/h; blue curve – speed 40 km/h)

**Таблица 4.** Экспертная оценка среднего давления электровоза на путь

**Table 4.** Expert assessment of the average pressure of an electric locomotive on the track

$V$ , км/ч	20	40	60	80	100
$\langle \Delta P \rangle$ , тс	22,560	22,517	21,617	22,055	22,592

$$\langle \Delta P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta P(t) dt, \quad (4)$$

здесь  $T$  – длина реализации давления электроваза на путь во времени.

Статическое давление электроваза на путь составляет 22,610 тс. Его сравнение с данными табл. 4 позволяет сделать вывод о том, что экспертная оценка среднего давления электроваза ЭП2К на неравноупругий путь на перегоне чрезвычайно близка к статическому давлению. Максимальное значение размаха давления на путь достигает приблизительно 6 тс на скорости 80 км/ч. Эта скорость весьма близка к критической скорости движения электроваза, а именно колесной пары. Около этой скорости возникает параметрический резонанс колесной пары, но ее амплитуда, несомненно, ограничена силами трения электроваза. Однако они создают критическое значение для коэффициента параметрического возбуждения  $\mu$ .

Динамическая система (2) является линейной, следовательно, для нее справедлив принцип суперпозиции. Поэтому для каждой гармоники демумльтипликационного воздействия границы областей динамической неустойчивости, видимо, можно отыскивать отдельно. Поэтому выделим неравноупругость пути в виде отдельного слагаемого в дифференциальных уравнениях, переписав (2) так:

$$\dot{\vec{Y}} = G_0 \vec{Y} + 2\mu G_1 \vec{Y} \cos 2\Omega t, \quad (5)$$

где  $G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix}$  – матрица Коши, теперь все ее элементы являются постоянными

величинами;  $C = \begin{pmatrix} c_u & -c_u & 0 \\ -c_u & c_u + c_\sigma & -c_\sigma \\ 0 & -c_\sigma & c_\sigma + c_0 \end{pmatrix}$  – матрица жесткостных коэффициентов электроваза на равноупругом пути, когда жесткость пути

равна  $c_{п}(x) = c_0$ ;  $\Lambda = c_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица неравноупругости железнодорожного пути;

$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1}\Lambda & 0 \end{pmatrix} G_1$  – матрица Хилла для неравноупругости пути;  $\mu$  – коэффициент параметрического возмущения, б/р (его величина находится в пределах 0–0,07);  $\Omega = \frac{\pi V}{3,6l_k}$  – частота

параметрического возбуждения, зависящая как от скорости движения электроваза (км/ч), так и от длины составляющей неравноупругости  $l$

(см. табл. 3);  $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_k \\ y_T \\ y_{кп} \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_T \\ \vdots \\ y_{кп} \end{pmatrix}$  – вектор обобщенных

координат ( $y_k, y_T, y_{кп}$  – подпрыгивание соответственно кузова, тележки, колесной пары).

Заметим, что в (5) был опущен постоянный член  $\vec{Q}$ , так как он не оказывает никакого влияния на границы областей параметрических резонансов (или динамической неустойчивости) [22].

Обратимся к поиску зон параметрической неустойчивости кузова, тележки и колесной пары электроваза, приняв  $l = l_k$ . Тогда частота мультипликативного возмущения вычисляется по (6):

$$\Omega = \frac{\pi V}{3,6l_k}. \quad (6)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами будем разыскивать в виде:

$$\vec{Y} = \vec{A}_1 \cos \Omega t + \vec{B}_1 \sin \Omega t + \vec{A}_3 \cos 3\Omega t + \vec{B}_3 \sin 3\Omega t, \quad (7)$$

Это позволит нам определить границы параметрического резонанса для главной (первой) и третьей области динамической неустойчивости:

$$\det(K(\mu) - \Omega E) = 0, \quad (8)$$

здесь матрица  $K(\mu)$  для первой и третьей зон неустойчивости равна:

$$K(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -(G - G) & 0 & -\mu G_1 \\ G_0 + \mu G_1 & 0 & \mu G_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\mu G_1 & 0 & -\frac{1}{3}G_0 \\ \frac{1}{3}\mu G_1 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для нахождения второй и четвертой областей параметрического резонанса общее решение (5) разыскиваем в виде:

$$\vec{Y} = \vec{A}_0 \vec{A}_2 \cos 2\Omega t + \vec{B}_2 \sin 2\Omega t + \vec{A}_4 \cos 4\Omega t + \vec{B}_4 \sin 4\Omega t. \quad (10)$$

Подстановка (10) после дифференцирования по времени в левую часть (5) и просто так в правую часть с дальнейшими тригонометриче-

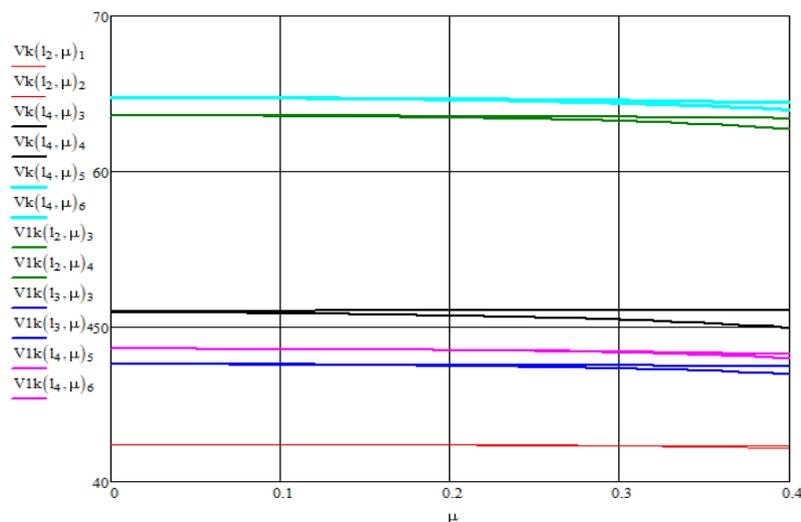
скими преобразованиями приводит к следующей матрице  $K(\mu)$ :

$$K(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}G & 0 & -\frac{1}{2}G_1 \\ \frac{1}{2}(G_0 - 2\mu^2 G_1 G_0^{-1} G_1) & 0 & \frac{1}{2}\mu G_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\mu G_1 & 0 & -\frac{1}{4}G_0 \\ \frac{1}{4}\mu G_1 & 0 & \frac{1}{4}G_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

где под 0, как и в (9), подразумевается нулевая матрица размерности любой из матриц  $G_0$  или

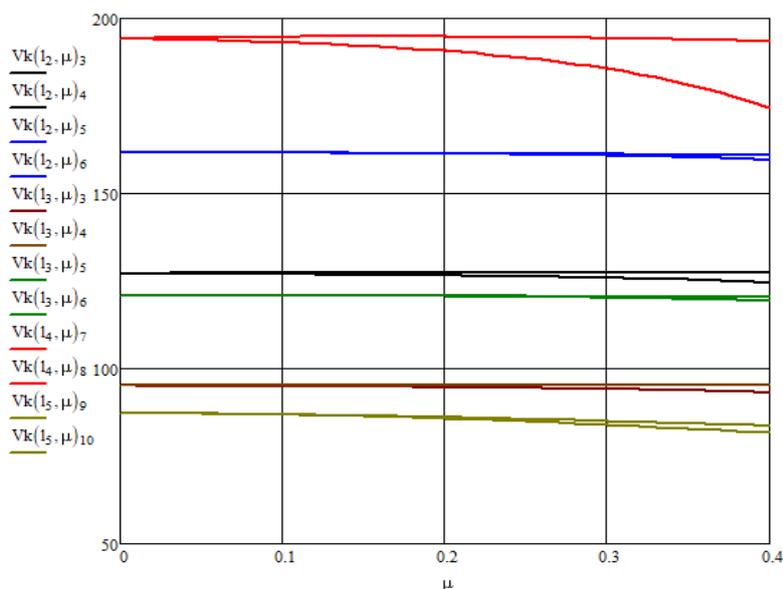
$G_1$ , т. е.  $6 \times 6$ . Отметим, что чем больше членов мы учитываем в решениях (7) и (10), тем выше и шире становятся матрицы (9) и (11).

Критические скорости кузова, тележки и колесной пары электровоза ЭП2К, в районе которых развиваются параметрические резонансы, показаны в табл. 5. Результаты математического моделирования уравнения (8) представлены на рис. 10 и 11.



**Рис. 10.** Резонансные скорости движения электровоза ЭП2К по неравноупругому пути в диапазоне скоростей 40–70 км/ч

**Fig. 10.** Resonance speeds of the electric locomotive EP2K along an unevenly elastic track in the Siberian in the speed range of 40–70 km/h



**Рис. 11.** Резонансные скорости движения электровоза ЭП2К по неравноупругому пути в диапазоне скоростей 70 – 200 км/ч

**Fig. 11.** Resonance speeds of the electric locomotive EP2K along an unevenly elastic track in the speed range of 70–200 km/h

**Таблица 5.** Критические скорости движения электровоза ЭП2К по неравноупругому пути, км/ч  
**Table 5.** Critical speed values of the EP2K electric locomotive on an unequal track, km/h

Составляющие неравноупругости Uneven elasticity components	Кузов Body	Тележка Bogie	Колесная пара Wheelset
1	177,332	677,829	2 501,119
2	40,53	154,92	571,639
3	30,312	115,864	427,528
4	16,235	62,055	228,976
5	6,176	23,607	87,107

Сразу оговоримся, что нами опущены скорости от 2 до 40 км/ч, а также свыше 200 км/ч. Оставлены только те скорости, которые попадают в зону эксплуатационных скоростей.

Если допустить, что железнодорожный путь является равноупругим, т. е. вертикальная жесткость пути на его протяженности постоянна, то мы получили бы только три резонансных частоты, совпадающие с собственными, а именно – 9,907; 37,869; 139,734 рад/с. Дальше все определяется длиной волны геометрической неровности или ее спектральной плотностью. На спектральной плотности подпрыгиваний кузова, тележки и колесной пары электровоза обнаружился бы на указанных частотах «пики».

Если мы меняем парадигму дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на парадигму дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что более точно отражает физическую сущность, то получим достаточно широкий диапазон скоростей шести областей динамической неустойчивости на рис. 10 и ровно столько же на рис. 11. Итого имеем 12 зон параметрического резонанса.

Исследовался условный, обобщенный, одноосный электровоз ЭП2К. За пределами анализа остались галопирование кузова и тележек. Если полагать, что для первой и второй тележек эти движения идентичны, то к уже найденным критическим скоростям еще добавится десять новых значений.

## Заключение

Речь идет о простых параметрических резонансах, однако известно о существовании ком-

бинационных параметрических резонансах разностного или суммарного типов, возникающих в механических системах с числом степеней свободы больше двух. В некотором смысле они напоминают «внутренние» резонансы, вообще говоря, силы трения в системе больше, тем они шире. Таким образом, в консервативных системах комбинационные резонансы не могут возникать. Методика их оценки пока для железнодорожного транспорта не разработана.

Установлена необходимость нормирования неравноупругости железнодорожного пути подобно тому, как это делается для геометрических неровностей на поверхности катания рельсов (как известно, нормируется градиент неровности, его нетрудно измерить физически). Для неравноупругости железнодорожного пути поступить так нельзя, необходима разработка методики ее нормирования.

Укажем на наличие соответствующих работ для железнодорожного транспорта [7–21, 23–25]. Но общая методика анализа параметрических колебаний на железнодорожном транспорте до настоящего времени не создана, так как высшая математика не предлагает нам регулярного рецепта интегрирования таких сложных уравнений. Все что на сегодняшний день мы имеем, это частные методики и применение приближенных или численных методов решения, которые до настоящего времени не могут определить все известные свойства уравнения Хилла в неоднородном случае.

Последняя известная авторам публикация на рассматриваемую тему представлена в 2017 г [25].

## Список литературы

1. Вибрации в технике: справочник (в 6 т.). Т. 1. Колебания линейных систем. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М. : Наука, 1972. 720 с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М. : Наука, 1987. 328 с.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. М. : Мир, 1978. 336 с.

5. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М. : Иностранная литература, 1953. 63 с.
6. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51. № 1. С. 99–128.
7. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1936. 58 с.
8. Леванков И.С. Качественный анализ свободных колебаний системы «неподдрессоренная масса – путь» при периодическом изменении жёсткости пути по его длине // Науч. тр. ДИИТа. 1972. № 138. С. 57–73.
9. Леванков И.С. Влияние неравножёсткости пути на шпалах и междушпальных пролётах на силы взаимодействия пути и подвижного состава // Науч. тр. ДИИТа. 1965. № 57. С. 63–79.
10. Леванков И.С. Исследование влияния изменения жесткости вдоль звена пути на характер и силы взаимодействия пути и подвижного состава // Науч. тр. ДИИТа, 1969. № 99. С. 76–93.
11. Фришман М.А., Леванков И.С. Исследование особенностей изменения вертикальной жесткости пути по его длине. Науч. тр. ДИИТа, 1972. № 138. С. 48–57.
12. Фришман М.А., Липовский Р.С., Данович В.Д. Экспериментальное определение частотных характеристик рельсосошпальной решётки // Науч. тр. ДИИТа, 1978. № 198/20. С. 3–11.
13. Фришман М.А., Леванков И.С. Об особенностях изменения вертикальной жёсткости вдоль пути с тяжёлым типом верхнего строения // Науч. тр. ДИИТа. 1973. № 142. С. 3–10.
14. Некоторые результаты экспериментального определения жесткости пути / Л.Я. Воробейчик, В.П. Гнеденко, В.И. Климов и др. // Науч. тр. ДИИТа. 1974. № 148. С. 9–16.
15. Карминский Д.Э., Кашников В.Н., Филоненков А.И. Исследование влияния периодической неравноупругости рельсовой нити в плане на характеристики динамического входа экипажей в кривые // Материалы (Тезисы докладов) Науч.-техн. конф. секций ДорНТО СКЖД и кафедр Ин-та. Ростов-на-Дону, 1971. С. 229–233.
16. Пахомов М.П., Нехаев В.А. Взаимодействие параметрически возбуждаемых и вынужденных колебаний колесной пары локомотива или вагона // Тезисы научно-технической конференции кафедр Омского института инженеров железнодорожного транспорта. Омск, 1984. С. 97–98.
17. Нехаев В.А., Астрелин В.А. О замене неравноупругости пути геометрической неровностью в задачах о колебаниях локомотивов // Тезисы научно-технической конференции кафедр ОмИИТа. Омск, 1986. С. 110.
18. Пахомов М.П., Нехаев В.А. К вопросу о параметрических колебаниях подвижного состава // Вопросы улучшения тяговых, энергетических и эксплуатационных свойств электровозов : сб. ст. Свердловск, 1978. № 59. С. 91–96.
19. Нехаев В.А., Сабиров Р.Д. Неравноупругость железнодорожного пути как возмущающий фактор // Известия Транссиба. 2013. № 3(15). С. 42–54.
20. Пахомов М.П., Галиев И.И., Нехаев В.А. Математическая модель колебаний тележки локомотива при движении по неравноупругому вдоль рельсового звена пути // Взаимодействие подвижного состава и пути и динамика локомотивов дорог Сибири, Дальнего Востока и Крайнего Севера : межвуз. тем. сб. науч. тр. Омск, 1981. С. 9–15.
21. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М. : ГИТТЛ, 1956. 600 с.
22. Бурчак Г.П. Колебания неподдрессоренной массы на неравноупругом пути с неровностью // Науч. тр. Акад. коммун. хоз-ва им. К.Д. Панфилова. 1980. Вып. 175. С. 84–98.
23. Панькин Н.А., Стесин И.М., Ценов В.П. Колебательные движения экипажей при параметрическом возмущении // Вестник ВНИИЖТ. 1978. № 1. С. 27–30.
24. Панькин Н.А., Стесин И.М., Бельняк Ю.Г. Вертикальные колебания экипажа, возникающие при движении по неравноупругому пути // Науч. тр. МИИТа. 1979. № 640. С. 24–32.
25. Буданов В.М. Об одной форме решения уравнения Матье // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2017. № 1. С. 42–47.

### References

1. Vibratsii v tehnike (spravochnik v 6 tomakh). Tom 1. Kolebaniya lineinykh sistem [Vibrations in Engineering (A handbook in 6 vol.). Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1978. 352 p.
2. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Lineinie differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow: Nauka Publ., 1972. 720 p.
3. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh [Parametric resonance in linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 328 p.
4. Schmidt G. Parametricheskie kolebaniya [Parametric oscillations]. Moscow: Mir Publ., 1978. 336 p.
5. McLachlan N.V. Teoriya i prilozheniya funktsii Mate [Theory and applications of Mathieu functions]. Moscow: Inostrannaya literature Publ., 1953. 63 p.
6. Filippov A.F. Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoii chast'yu [Differential equations with a discontinuous right-hand side]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1960, vol. 51, no. 1, pp. 99–128.
7. Bondarenko G.V. Uravnenie Hilla i ego primenenie v oblasti tekhnicheskikh kolebanij [Hill's equation and its application in the field of technical fluctuations]. Moscow–Leningrad: AN SSSR Publ., 1936. 58 p.
8. Levankov I.S. Kachestvennyi analiz svobodnykh kolebanii sistemy «nepodressorennyaya massa – put'» pri periodicheskom izmenenii zhestkosti puti po ego dline [Qualitative analysis of free oscillations of the «unsprung mass – path» system with periodic changes in the stiffness of the path along its length]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1972, no. 138, pp. 57–73.

9. Levankov I.S. Vliyanie neravnozhestkosti puti na shpalakh i mezhdushpal'nykh proletakh na sily vzaimodeistviya puti i po-dvizhnogo sostava [The influence of the non-rigidity of the track on sleepers and interspan spans on the interaction forces of the track and rolling stock]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1965, no. 57, pp. 63–79.

10. Levankov I.S. Issledovanie vliyaniya izmeneniya zhestkosti vdol' zvena puti na kharakter i sily vzaimodeistviya puti s podvizhnym sostavom [Investigation of the influence of stiffness change along the track link on the nature and forces of interaction between the track and the rolling stock]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1969, no. 99, pp. 76–93.

11. Frishman M.A., Levankov I.S. Issledovanie osobennosti izmeneniya vertikal'noi zhestkosti puti po ego dline [Research of the features of the change in the vertical stiffness of the path along its length]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1972, no. 138, pp. 48–57.

12. Frishman M.A., Lipovskii R.S., Danovich V.D. Eksperimental'noe opredelenie chastotnykh kharakteristik rel'soshpal'noi reshetki [Experimental determination of the frequency characteristics of the rail-sleeper grating]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1978, no. 198/20, pp. 3–11.

13. Frishman M.A., Levankov I.S. Ob osobennostyakh izmeneniya vertikal'noi zhestkosti vdol' puti s tyazhelym tipom verkhnego stroeniya [About the peculiarities of the change in vertical stiffness along the path with a heavy type of upper structure]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1973, no. 142, pp. 3–10.

14. Vorobeichik L.Ya., Gnedenko V.P., Klimov V.I., Levankov I.S. Nekotorye rezul'taty eksperimental'nogo opredeleniya zhestkosti puti [Some results of the experimental determination of the rigidity of the path]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1974, no. 148, pp. 9–16.

15. Karminskii D.E., Kashnikov V.N., Filonenkov A.I. Issledovanie vliyaniya periodicheskoi neravnouprugosti rel'sovoi niti v plane na kharakteristiki dinamicheskogo vkhoda ekipazhei v krivye [Investigation of the influence of the periodic uneven elasticity of a rail thread in the plane on the characteristics of the dynamic entry of vehicles into curves]. *Materialy nauchno-tekhnicheskoi konferentsii sektsii Dor NTO SKZHD i kafedr instituta* [Proceedings of scientific-technical conference of section: Dor. NTO of the North Caucasus Railway and departments of the institute]. Rostov-on-Don, 1971, pp. 229–233.

16. Pakhomov M.P., Nekhaev V.A. Vzaimodeistvie parametricheski vzbuzhdaemykh i vyzhuzhennykh kolebaniy kolesnoi pary lokomotiva ili vagona [Interaction of parametrically excited and forced vibrations of a wheel pair of a locomotive or wagon]. *Tezisy nauchno-tekhnicheskoi konferentsii kafedr Omskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta* [Abstracts of the scientific and technical conference of the departments of the Omsk Institute of Railway Engineers]. Omsk, 1984, pp. 97–98.

17. Nekhaev V.A., Astrelin V.A. O zamene neravnouprugosti puti geometricheskoi nerovnostyu v zadachakh o kolebaniyakh lokomotivov [On the replacement of unequal elasticity of the track by geometric roughness in problems of locomotive oscillations]. *Tezisy nauchno-tekhnicheskoi konferentsii kafedr Omskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta* [Abstracts of the scientific and technical conference of the departments of the Omsk Institute of Railway Engineers]. Omsk, 1986. 110 p.

18. Pakhomov M.P., Nekhaev V.A. K voprosu o parametricheskikh kolebaniyakh podvizhnogo sostava [On the issue of parametric oscillations of the rolling stock]. *Sbornik statei «Voprosy uluchsheniya tyagovykh, energeticheskikh i ekspluatatsionnykh svoystv elektrovozov»* [Proceedings «Issues of improving the traction, energy and operational properties of electric locomotives»]. Sverdlovsk, 1978, no. 59, pp. 91–96.

19. Nekhaev V.A., Sabirov R.D. Neravnouprugost' zheleznodorozhnogo puti kak vozmushchayushchii faktor [Unequal elasticity of the railway track as a disturbing factor]. *Izvestiya Transsiba* [Bulletins of Transsib], 2013, no. 3(15), pp. 42–54.

20. Pakhomov M.P., Galiev I.I., Nekhaev V.A. Matematicheskaya model kolebaniy telezhki lokomotiva pri dvizhenii po neravnouprugomu vdol' rel'sovogo zvena puti [Mathematical model of oscillations of a locomotive bogie when moving along an unequally elastic track along a rail link]. *Mezhvuzovskii tematicheskii sbornik nauchnykh trudov «Vzaimodeistvie podvizhnogo sostava i puti i dinamika lokomotivov dorog Sibiri, Dalnego Vostoka i Krainego Severa»* [Interuniversity topics proceedings «Interaction of rolling stock and tracks and dynamics of locomotives on the roads of Siberia, the Far East and the Far North»]. Omsk, 1981, pp. 9–15.

21. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow: GITTL Publ., 1956. 600 p.

22. Burchak G.P. Kolebaniya nepodressorennoi massy na neravnouprugom puti s nerovnostyu [Oscillations of the unsprung mass on an unequal elastic track with unevenness]. *Nauchnye trudy Akademii kommunisticheskogo khozyaistva im. K.D. Panfilova* [Scientific proceedings of Academy of communistic facilities named after K.D. Panfilov], 1980, no. 175, pp. 84–98.

23. Pan'kin N.A., Stesin I.M., Tsenov V.P. Kolebatel'nye dvizheniya ekipazhei pri parametricheskom vozmushchenii [Oscillatory motions of vehicles under parametric perturbation]. *Vestnik Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta zheleznodorozhnogo transporta* [Bulletin of All-Union scientific-research institute of railway transport], 1978, no. 1, pp. 27–30.

24. Pan'kin N.A., Stesin I.M., Belenkaya Yu.G. Vertikal'nye kolebaniya ekipazha, voznikayushchie pri dvizhenii po neravnouprugomu puti [Vertical oscillations of the crew, arising when moving along an unequal-elastic path]. *Nauchnye trudy Moskovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Moscow institute of engineers of transport], 1979, no. 640, pp. 24–32.

25. Budanov, V.M. Ob odnoi forme resheniya uravneniya Mate [On one form of solution of the Mathieu equation]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1, matematika, mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Ser. 1, Mathematics, mechanics], 2017, no. 1, pp. 42–47.

**Информация об авторах**

**Нехаев Виктор Алексеевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, e-mail: nehaevva@rambler.ru.

**Николаев Виктор Александрович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, e-mail: NikolaevVA@omgups.ru.

**Леоненко Елена Геннадьевна**, преподаватель электромеханического отделения, Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск, e-mail: leonenko-eg@mail.ru.

**Information about the authors**

**Viktor A. Nekhaev**, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of the Department «Theoretical and Applied Mechanics», Omsk State Transport University, Omsk; e-mail: nehaevva@rambler.ru.

**Viktor A. Nikolaev**, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Omsk State Transport University, Omsk; e-mail: NikolaevVA@omgups.ru.

**Elena G. Leonenko**, Lecturer of the Electromechanical Department, Krasnoyarsk Rail Transport Institute, a branch of Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk; e-mail: leonenko-eg@mail.ru.