УДК *517.3*

Н. С. Зеленко[1], Д. А. Сортоков[1], О. Д. Толстых[1]

[1]Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЙЛЕРОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. *Данная статья посвящена эйлеровым интегралам первого и второго рода, так же известные как гамма и бета функции, которые широко используются в различных областях математики и физики. В этой статье рассматриваются основные свойства этих интегралов и их применение в науке, а также рассматриваются конкретные задачи, которые можно решить с помощью эйлеровых интегралов первого и второго рода. Отметим, что применение эйлеровых интегралов может существенно упростить вычисление определенных интегралов, в том числе несобственных. А также решить поставленную задачу в случае, если для подинтегральной функции первообразная не может быть найдена в конечном виде. Благодаря своим свойствам, эйлеровы интегралы первого и второго рода являются мощным инструментом для анализа и решения различных математических и физических задач. Поэтому исследование свойств эйлеровых интегралов полезно всем, кто интересуется математикой и возможностями применения их не только в математике, но и при решении прикладных задач.*

Ключевые слова: *бета-функция, гамма-функция, эйлеровы интегралы, эллиптические функции, моделирование явлений, функции Бесселя, эллиптические дифференциальные уравнения.*

N. S. Zelenko[1], D. A. Sortokov[1], O. D. Tolstykh[1]

[1]Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

APPLICATIONS OF EULERIAN INTEGRALS

Abstract. *This article is devoted to eulerian integrals of the first and second kind, also known as gamma and beta functions, which are widely used in various fields of mathematics and physics. This article discusses the main properties of these integrals and their application in science, and also discusses specific problems that can be solved using eulerian integrals of the first and second kind. Note that the use of eulerian integrals can significantly simplify the calculation of certain integrals, including improper ones. And also to solve the problem in the event that for a subintegral function, the primitive cannot be found in the final form. Due to their properties, eulerian integrals of the first and second kind are a powerful tool for analyzing and solving various mathematical and physical problems. Therefore, the study of the properties of eulerian integrals is useful to anyone who is interested in mathematics and the possibilities of using them not only in mathematics, but also in solving applied problems.*

Keywords: beta function, gamma function, eulerian integrals, elliptic functions, modeling of phenomena, Bessel functions, elliptic differential equations.

Введение

Эйлеровы интегралы первого и второго рода - это хорошо известные интегралы, которые возникли в работах Леонарда Эйлера в 18 веке. Они имеют множество свойств, которые делают их полезными для решения различных задач в математике, физике и инженерии. Оба интеграла имеют множество интересных свойств [1], [2], [3]. К примеру, Эйлеров интеграл первого рода связан с эллиптическими функциями и используется в анализе эллиптических дифференциальных уравнений [4], [5], [6]. Эйлеров интеграл второго рода может быть использован для решения задач теории вероятности, статистики и теории случайных процессов; при анализе поведения функций вблизи точек разрыва. Эйлеровы интегралы находят применение в расчетах траекторий частиц в электромагнитном поле; при решении уравнений квантовой механики и статистической физики; при моделировании явлений; в расчетах длины дуги и решении уравнений электродинамики. Они также используются в инженерии, например, в расчетах прочности материалов и конструкций. Эти интегралы были изучены многими математиками и получили различные обобщения и расширения. В данной статье мы рассмотрим основные свойства и применения Эйлеровых интегралов первого и второго рода. А так же покажем, возможности их использования при решении различных задач в математике и ее приложениях.

Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы первого и второго рода (*гамма и бета функции*) являются одними из наиболее распространённых интегралов, которые возникают во многих областях науки и техники.

Эйлеров интеграл первого рода

Эйлеров интеграл первого рода (*бета-функция Эйлера*) – интеграл вида

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \text{ где } p > 0, q > 0, \tag{1.1}$$

или в другой форме

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \tag{1.1'}$$

Он представляет собой функцию двух переменных p и q, где p и q – параметры интеграла, график функции представлен на рис.1.

Интеграл (1.1) сходится при $p > 0$, $q > 0$ и расходится при $p \leq 0$ или $q \leq 0$. Отметим свойство симметричности *бета-функции* относительно своих аргументов:

$$B(p,q) = B(p,q). \tag{1.2}$$

Бета-функция связана с *гамма-функцией* формулой

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.3}$$

Отметим интересное свойство бета-функции (см. 1.2):

$$B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p). \tag{1.4}$$

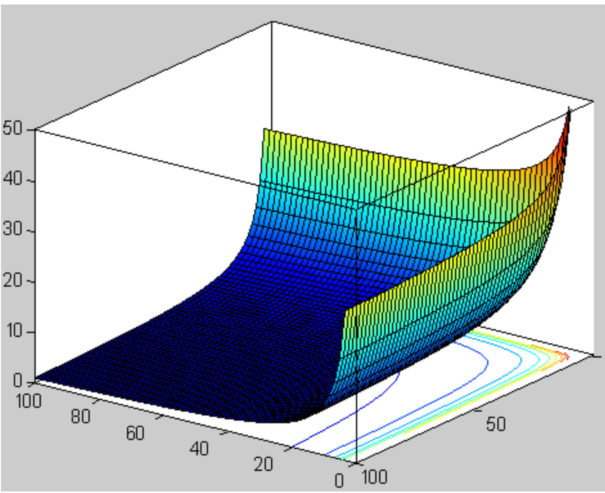

Рис. 1. Графическое изображение бета-функции

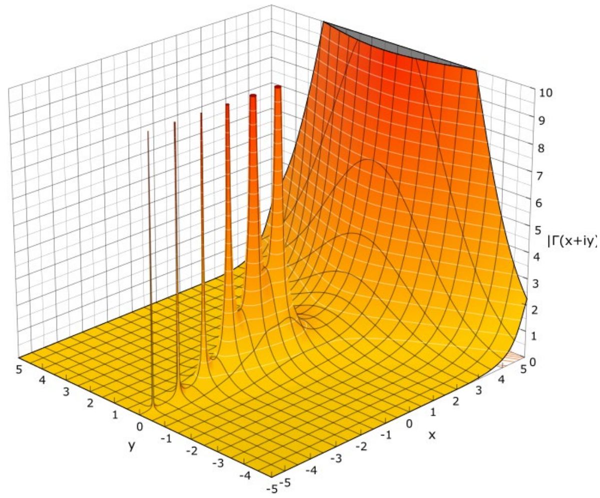

Рис. 2. График модуля гамма-функции

Эйлеров интеграл второго рода

Эйлеров интеграл второго рода (*гамма-функция Эйлера*) – интеграл вида

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx\,, \quad p > 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1 -$ сходящийся несобственный первого рода

В общем случае во множестве комплексных чисел *гамма-функция* определяется следующим образом:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad Rep > 0\,. \tag{2.1'}$$

Интеграл (2.1) сходится при $p > 0$ и расходится при $p \le 0$. Интеграл (2.1′) сходится при $Rep > 0$, график модуля функции $\Gamma(p)$ при $Rep > 0$ представлен на рис.2. Здесь мы в основном будем рассматривать эйлеров интеграл вида (2.1).

Гамма-функция непрерывна в области $p > 0$ и имеет в ней производные любого порядка, которые можно найти, используя дифференцирование под знаком интеграла:

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx. \tag{2.2}$$

Как следствие формулы (2.1) получим обобщение *гамма-функции*

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}. \tag{2.3}$$

Если $p > 0$, то справедлива формула понижения

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p). \tag{2.4}$$

Это свойство можно использовать для вычисления значений *гамма-функции Эйлера* для целых p и, в частности, для вычисления факториала для натуральных n:

$$\Gamma(1) = 1;\ \ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n),\ \ \Gamma(n+1) = n! \tag{2.5}$$

Гамма-функция в общем случае обобщает понятие факториала при $0 < p < 1$.

Можно показать справедливость формулы дополнения:

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \tag{2.6}$$

Из формулы (2.6) при $p = \frac{1}{2}$, что

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \ \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.8}$$

Отметим еще один интересный факт, позволяющий использование эйлеровых интегралов при интегрировании: $p > 0$ и $q > 0$ справедлива формула

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1}x\, cos^{q-1}x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right). \tag{2.9}$$

Эта формула может быть получена преобразованием входящего в нее интеграла следующей подстановкой:

$$sinx = \sqrt{t},\ \ t \ge 0;\ \ x = 0 \ \ => t = 0;\ x = \frac{\pi}{2} \ \ => t = 1; cosx = \sqrt{1 - sin^2 x} = \sqrt{1-t};$$

$$x = arcsin\sqrt{t};\ \ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt.$$

Тогда $$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{p-1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{q-1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right).$$

Стало быть, формула (2.9) доказана.

Отличия эйлеровых интегралов первого и второго рода

Бета-функция и гамма-функция интересные специальные функции, которые широко используются в математике, физике и ее приложениях.

1. *Бета-функция* определена для положительных вещественных чисел p и q, тогда как *гамма-функция* определена на множестве комплексных чисел p с положительной вещественной частью.
2. Значения *бета-функции* всегда положительны, тогда как значения *гамма-функции* могут быть как положительными, так и отрицательными (в общем случае комплекснозначные).
3. *Бета-функция* является симметричной относительно своих параметров, тогда как *гамма-функция* не обладает свойством симметрии.

Уравнение Бесселя и эйлеровы интегралы

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2Z''(x) + xZ'(x) + (x^2 - v^2)Z(x) = 0, \tag{4.1}$$

где x – действительная переменная; $Z = Z(x)$ – действительная функция от x; v – вещественное число. Его общее решение представляется формулой:

$$Z(x) = C_1Z_1(x) + C_2Z_2(x), \tag{4.2}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$ – частные линейно-независимые решения уравнения (4.1).

Для линейного дифференциального уравнения (4.1) с переменными коэффициентами нет общего аналитического способа интегрирования. Частные решения уравнения (4.1) можно определить, используя теорию степенных рядов.

Учитывая вид уравнения (4.1), одно из частных решений можно представить обобщенным степенным рядом:

$$Z_1(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{4.3}$$

где α и a_k подлежат определению.

Дифференцируя (4.3) два раза по x и подставляя в (4.1), для нахождения α и a_k получим бесконечную систему

$$\begin{gathered}(\alpha^2 - v^2)a_0 = 0,\\ [(\alpha-1)^2 - v^2]a_1 = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ [(\alpha+n)^2 - v^2]a_n - a_{n-2} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ .\end{gathered} \tag{4.4}$$

При $a_0 \neq 0$ решаем систему (4.4) относительно постоянных α и a_0, получим:

$$\alpha = \pm v; \tag{4.5}$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0; \tag{4.6}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k!\,2^{2k}(v+1)(v+2)\dots(v+k)}. \tag{4.7}$$

Искомое частное решение имеет вид:

$$Z(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+v}}{k!\,2^{2k}(v+1)(v+2)\dots(v+k)}, \qquad (4.8)$$

где a_0 – произвольная постоянная, напрямую связанная с *гамма-функцией.*

В целях рационализации для табулирования ряда (4.8) Бесселем была введена постоянная a_0 вида

$$a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}, \qquad (4.9)$$

где v – индекс уравнения, а $\Gamma(v+1)$ – гамма функция.

Использование эйлеровых интегралов

Примеры применения эйлеровых интегралов в математике

В математике эйлеровы интегралы первого и второго рода могут помочь с нахождением интегралов, намного упрощая в техническом плане традиционные приемы вычисления. Стоит отметить, что существуют интегралы, в том числе и несобственные, в которых первообразная подинтегральной функции не берется в конечном виде. В этом случае хороший результат дает использование *гамма* и *бета* функций.

Рассмотрим несколько примеров, где наглядно показано как эйлеровы интегралы первого и второго рода упрощают вычисление определенных интегралов.

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx.$

В интегральном исчислении функции одной переменной традиционно используют формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x):$$

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2x)^3 dx;$$

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx;$$

$$I = \frac{1}{8}\left(x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4x)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2x) \cos 2x\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{sin2x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right);$$

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + 0\right) = \frac{5\pi}{32}. \qquad I = \frac{5\pi}{32}.$$

Объем преобразований и вычислений достаточно сильно растет с увеличением четной степени тригонометрической функции. Вычисления с использованием эйлеровых интегралов существенно короче, что позволяет экономить время.

Для сравнения вычисление данного интеграла с помощью эйлеровых интегралов ((2.9), (2.4) и (2.8)):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^0 x\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(4)}=\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi}{2\cdot 3!}.\text{ Стало быть, }\quad I=\frac{5\pi}{32}.$$

2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx.$

Вычисление традиционными методами интегрального исчисления:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\,sinx\,dx=\left\{\begin{matrix} cosx=t|_1^0\\ dt=-sinxdx\\ sin^2x=1-t^2\end{matrix}\right\}=\int_0^1(1-t^2)^2dt=\int_0^1(1-2t^2+t^4)dt;$$

$$I=\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}.$$

Используя эйлеровы интегралы, находим (см.(2.9)):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\,cos^0x\,dx=\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{15}.$$

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{\sin^2 x\cos x}\cos x\,dx.$

Традиционная замена:

$sinx=t,\ dt=cosx\,dx;\ x=0=>t=0;\ x=\dfrac{\pi}{2}=>t=1;\ cosx=\sqrt{1-t^2}.$

Таким образом, получаем интеграл от дифференциального бинома

$$\int_0^1 t^{\frac{2}{3}}(1-t^2)^{\frac{1}{3}}dt.$$

Отметим, что $\int x^m(ax^m+b)^q\,dx$ берется в трех случаях:

$$p\in Z;\quad q=\frac{m+1}{n}\in Z;\quad p+q\in Z.$$

Для полученного интеграла $m=\frac{2}{3}$; $n=2$; $p=\frac{1}{3}$; $q=\frac{5}{6}$; $p+q\notin Z$.

Данный интеграл не берется в конечном виде.

Эйлеровы интегралы позволяют вычислить этот интеграл ((2.9), (2.4), (2.7) и (2.6)):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2/3}x\cos^{4/3}x\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{2\Gamma(2)}=\frac{\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2}=\frac{\pi}{12\sin\frac{\pi}{6}};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x \cos x}\cos x\,dx = \frac{\pi}{6}.$$

4. $\boldsymbol{I} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$.

Проведем необходимые преобразования для использования эйлеровых интегралов (см. формулы (1.1), (1.3), (2.6) и (2.8)).

Сделаем замену $cosx = 1 - 2\sqrt{t}$, $x = 0 \ => \ t = 0$; $x = \pi \ => \ t = 1$. Тогда

$$sinx = \sqrt{1 - cos^2x} = \sqrt{1 - \left(1 - 2\sqrt{t}\right)^2} = 2t^{\frac{1}{4}}(1 - t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}};$$

$\sqrt{3 - cosx} = \sqrt{2 + 2\sqrt{t}} = \sqrt{2}(1 + t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$; $dcosx = -\frac{1}{\sqrt{t}}dt$; $dcosx = -sinxdx$, т. е.

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{t}sinx}; \quad dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{4}}\left(1 - t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Тогда $I = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{3}{4}}(1 - t^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}dt}{2\sqrt{2}(1 + t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1 - t)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$

Как в предыдущем примере.

$m = -\frac{3}{4}$; $n = 1$; $p = -\frac{1}{2}$; $q = \frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}$; $p + q \notin Z -$ неберущийся интеграл.

Используя эйлеровы интегралы, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)};$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}; \qquad I = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}}.$$

Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Неопределенный интеграл от гауссовой функции не берется в конечном виде.

Чтобы найти данный интеграл, для начала найдем квадрат этого интеграла, а потом от результата возьмем корень. Это делается для того, чтобы проще можно было перейти к полярным координатам

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Мы видим, что у нас получается двойной интеграл от функции

$$g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Элемент площади в декартовой системе координат $dS = dxdy$ преобразуем при переходе в полярную систему координат следующим образом:

$$dS = dxdy = rdr \cdot d\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{array}\right| \rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Нужно заметить, что r изменяется в пределах от 0 до $+\infty$. Угол φ изменяется от 0 до $\pi/2$, т.к. x, y в 1 четверти. Стало быть,

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} rd\varphi rd = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} rdr;$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty\Big) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-r^2} + e^0\right) \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}};$$

$$I^2 = \frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}; \qquad I^2 = \frac{\pi}{4} \;\; => \;\; I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

В силу симметричности интеграла и положительной области значений подынтегральной функции, можно заключить, что:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}; \qquad I = \sqrt{\pi}.$$

В общем случае с помощью эйлеровых интегралов вычислим интеграл Эйлера-Пуассона $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Полагая $x = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, получим $dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} t^{-\frac{1}{2}} dt$ и

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\; (a > 0).$$

В частности, полагая в интеграле $a = 1$ получаем

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^3} dx.$

Стандартный способ интегрального исчисления сводит интеграл к интегралу от рациональной дроби:

$$I=\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^3}dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt[4]{x}=t|_0^\infty, \ x=t^4 \\ dx=4t^3dt\end{matrix}\right\}=\int_0^\infty \frac{t\cdot 4t^3\cdot dt}{(1+t^4)^3}=4\int_0^\infty \frac{(t^4+1)-1}{(1+t^4)^3}dt;$$

$$I=4\int_0^\infty \left(\frac{1}{(1+t^4)^2}-\frac{1}{(1+t^4)^3}\right)dt.$$

Правильные рациональные дроби представляются в виде суммы простейших дробей 3 и 4 типа. В итоге вычисление несобственного интеграла очень объемное в техническом плане.

Приведем вычисление несобственного интеграла первого рода с использованием эйлеровых интегралов (см.(1.2, 1.3, 2.4, 2.5, 2.6)).

$$I=\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^3}dx=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^3}dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2};$$

$$I=\frac{3\pi}{32sin\frac{\pi}{4}}=\frac{3\sqrt{2}\pi}{32}. \qquad I=\frac{3\sqrt{2}\pi}{32}.$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}xdx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad n\in N.$

Традиционное понижение четной степени тригонометрической позволит вывести рекуррентную форму, что займет много времени, поэтому мы ограничимся вычислением данного интеграла через эйлеровы интегралы (см.(2.9, 2.5)).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}xdx=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)}=\frac{(2n-1)!!\,\pi}{2\cdot 2^n n!}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

Пример применения эйлеровых интегралов в физике

Рассмотрим пример из статистической физики, связанный с распределением Бозе-Эйнштейна. Предположим, у нас есть система из 100 неразличимых бозонов – N, распределенных по 5 энергетическим уровням. Пусть количество квантовых состояний (мультипликативность) на каждом уровне будет следующим: $g_1=1$, $g_2=2$, $g_3=3$, $g_4=4, g_5=5$. Найдем среднее число бозонов на каждом из энергетических уровней.

Вероятность нахождения k бозонов на $k-$ом энергетическом уровне задается распределением Бозе-Эйнштейна:

$$P(k)=\frac{\left(\frac{g_k}{1+g_1+g_2+\cdots}\right)^k}{1+g_1+g_2+\cdots},$$

где g_k - число квантовых состояний (мультипликативность) на $k-$ ом энергетическом уровне, а сумма в знаменателе обозначает статистическую сумму системы.

Это распределение основано на принципе Бозе-Эйнштейна, который описывает поведение бозонов.

Решение Среднее число бозонов на $k-$ом энергетическом уровне можно выразить через вероятность $P(k)$ и общее число бозонов N:

$$\langle n_k \rangle = N \cdot P(k),$$

где $\langle n_k \rangle$ - среднее число бозонов на $k-$ом уровне.

Используя распределение Бозе-Эйнштейна, получим:

$$\langle n_k \rangle = N \cdot \frac{\left(\frac{g_k}{1 + g^1 + g^2 + \cdots}\right)^k}{1 + g^1 + g^2 + \cdots}.$$

Можно сказать, что статистическая сумма системы, которая присутствует в знаменателе, может быть выражена через гамма-функцию. Фактически, она имеет вид:

$$1 + g_1 + g_2 + \ldots = \sum g_k = \Gamma(1 + g),$$

где $g = g_1 + g_2 + \cdots$ — параметр, связанный с мультипликативностью системы.

Стало быть, среднее число бозонов на $k-$ом энергетическом уровне можно записать в виде:

$$\langle n_k \rangle = N \cdot \frac{\left(\frac{g_k}{\Gamma(1 + g)}\right)^k}{\Gamma(1 + g)}.$$

В этой формуле гамма-функция используется для вычисления статистической суммы и связанного с ней параметра g. Выражение $\langle n_k \rangle$ дает нам среднее число бозонов на $k-$ом энергетическом уровне в системе, заданной распределением Бозе-Эйнштейна.

Теперь по ранее приведенным формулам найдем общую статистическую сумму системы, используя гамма-функцию. Параметр g будет равен сумме мультипликативностей на всех уровнях:

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Теперь можем вычислить статистическую сумму:

$$\Gamma(1 + g) = \Gamma(1 + 15) = \Gamma(16) = 15!$$

Для вычисления значения гамма-функции $\Gamma(16)$ можно использовать таблицы значений или калькуляторы. В данном случае, значение $\Gamma(16)$ равно примерно 20922789888000.

Теперь можем найти среднее число бозонов на каждом уровне. Используем формулу:

$$\langle n_k \rangle = N \cdot \frac{\left(\frac{g_k}{\Gamma(1 + g)}\right)^k}{\Gamma(1 + g)}.$$

Для каждого уровня k посчитаем $\langle n_k \rangle$:

$$\langle n_1 \rangle = 100 \cdot \frac{\left(\frac{1}{20922789888000}\right)^1}{20922789888000} \approx 4{,}783 \cdot 10^{-17},$$

$$\langle n_2 \rangle = 100 \cdot \frac{\left(\frac{2}{20922789888000}\right)^2}{20922789888000} \approx 9{,}566 \cdot 10^{-17},$$

$$\langle n_3 \rangle = 100 \cdot \frac{\left(\frac{3}{20922789888000}\right)^3}{20922789888000} \approx 1{,}366 \cdot 10^{-16},$$

$$\langle n_4 \rangle = 100 \cdot \frac{\left(\frac{4}{20922789888000}\right)^4}{20922789888000} \approx 1{,}702 \cdot 10^{-16},$$

$$\langle n_5 \rangle = 100 \cdot \frac{\left(\frac{5}{20922789888000}\right)^5}{20922789888000} \approx 1{,}884 \cdot 10^{-16}.$$

Заключение

На основании основных свойств *гамма* и *бета* функций проведен сравнительный анализ методов практического вычисления определенных (в том числе несобственных интегралов) традиционными методами интегрального исчисления и с помощью эйлеровых интегралов. Отметим, что применение эйлеровых интегралов может существенно упростить вычисление, а также решить поставленную задачу в случае, если для подинтегральной функции первообразная не может быть найдена в конечном виде. С помощью эйлеровых интегралов описаны возможности применения в решении конкретной прикладной задачи из статистической физики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Виленкин, Н.Я., Куницкая, Е.С, Мордкович, А.Г. Математический анализ: интегральное исчисление. М.: Наука, 1979. – 435 с.

2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. – 807 с.

3. Гусак, А.А. Высшая математика. Учебник для студентов вузов. В 2 т. – том 1, 6-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2010. – 544 с.

4. Кошляков, Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Физматгиз, 1962. — 710 с..

5. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения - М.: Гостехиздат, 1963. – 377 с.

6. Функции Бесселя: Учебно-методическое пособие / Сост.: В.И.Зубов. – М.: МФТИ, 2007. – 51 с.

REFERENCES

1. Vilenkin, N.Ya., Kunitskaya, E.S., Mordkovich, A.G. Mathematical analysis: integral calculus. M.: Nauka, 1979. – 435 c.

2. Fichtenholz, G.M. Course of differential and integral calculus. Vol. 2. M.: Fizmatgiz, 1962. - 807 c.

3. Gusak, A.A. Higher mathematics. Textbook for university students. In 2 vols. – volume 1, 6th ed. – Minsk: TetraSystems, 2010. – 544 c.

4. Koshlyakov, N.S. , Gliner E.B. , Smirnov M., M. Basic differential equations of mathematical physics.-M.: Fizmatgiz, 1962. – 710 c.

5. Lebedev, N. N. Special functions and their applications. -M.: Gostekhizdat, 1963. – 377 c.

6. Bessel's functions: An educational and methodical manual / Sost.: V.I.Zubov. – M.: MFTI, 2007. – 51 c.

Информация об авторах

Зеленко Никита Сергеевич – студент 1 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: nikita.zelenkoshamansky@yandex.ru

Сортоков Демитрий Алексеевич – студент 1 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: fggcfvdh@gmail.com

Толстых Ольга Дмитриевна – к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: tolgad05@mail.ru

Information about the authors

Nikita Sergeevich Zelenko-1st year student specialization "Construction of railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: nikita.zelenkoshamansky@yandex.ru

Demitri Alekseevich Sortkov-1st year student specialization "Construction of railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: fggcfvdh@gmail.com

Tolstoy Olga Dmitrievna-Ph.D., Associate Professor of the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: tolgad05@mail.ru