

Д. В. Алексеева<sup>1</sup>, А. Э. Верянская<sup>1</sup>, И. И. Тихий<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

**Аннотация.** В данной статье рассматривается метод перемещений как один из способов расчёта статически неопределимых рам. Особое внимание уделено описанию особенностей применения этого метода, который является одним из наиболее широко используемых методов расчета статически неопределимых рам. Проводится сравнение метода перемещений и метода сил. Так же в статье представлен анализ возможных ошибок, которые могут возникнуть в процессе расчета различных конструкций, с последующим рассмотрением методов и подходов, позволяющих минимизировать эти ошибки. Предлагаются правила расчета коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений. Предлагаются правила перемножения эпюр и порядок построения эпюр поперечных сил, приводится сравнение. В результате проведенных исследований показано, что метод перемещений является эффективным инструментом для решения широкого спектра задач строительной механики.

**Ключевые слова:** метод перемещений, расчет статически неопределимых рам, анализ ошибок, коэффициенты и свободные члены, эпюра, каноническое уравнение, поперечные силы, правила знаков, жесткость, лишние связи.

D. V. Alekseeva<sup>1</sup>, A. E. Veryanskaya<sup>1</sup>, I. I. Tikhii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

## FEATURES OF USING THE DISPLACEMENT METHOD FOR CALCULATING STATICALLY INDETERMINATE FRAMES

**Abstract.** This article discusses the displacement method as one of the methods for calculating statically indeterminate frames. Special attention is paid to the description of the features of the application of this method, which is one of the most widely used methods for calculating statically indeterminate frames. The method of displacement and the method of forces are compared. The article also presents an analysis of possible errors that may occur during the calculation of various structures, followed by a review of methods and approaches to minimize these errors. The rules for calculating coefficients and free terms of the system of canonical equations are determined. The rules of multiplication of plots and the order of construction of plots of transverse forces are considered, a comparison is given. The results of the study show that the displacement method is an effective tool for solving a wide range of problems of structural mechanics.

**Keywords:** displacement method, calculation of statically indeterminate frames, error analysis, coefficients and free terms, plot, canonical equation, transverse forces, sign rules, rigidity, unnecessary connections.

### Введение

Расчет статически неопределимых рам является сложной и ответственной задачей, которая требует учета многих факторов и сильных математических навыков. Один из методов, который используется для решения этой задачи, - метод перемещений. Метод перемещений является одним из наиболее распространенных методов расчета статически неопределимых рам. Он основан на определении перемещений узлов рамы и расчете напряжений в стержнях, которые получаются из перемещений. Однако, несмотря на популярность метода, его использование может вызвать затруднения, особенно в тех случаях, когда задача является очень сложной или имеет необычные условия. Поэтому, в данной статье будет проведен анализ особенностей применения метода перемещений для расчета статически неопределимых рам и выявлены ошибки, которые могут возникнуть в процессе его использования. Также будут представлены методы и подходы, которые помогут минимизировать возможные ошибки и повышать точность расчета.

В статье будут рассмотрены особенности метода перемещений, его преимущества и недостатки в сравнении с существующими методиками. При помощи анализа решить, является ли метод перемещений эффективным инструментом для решения широкого спектра задач строительной механики.

### Сравнение метода сил и метода перемещений

В зависимости от количества неизвестных реакций системы, рассматриваемые строительной механикой, можно разделить на две категории:

- статически определимые, для которых достаточно уравнений статики
- статически неопределимые системы с лишними связями, для решения которых используются как уравнения статики, так и уравнения перемещений.

Лишние связи не нарушают геометрическую целостность конструкции, но придают ей большую жесткость. Для расчета статически неопределимых систем в строительной механике существуют два подхода: метод перемещений, который основан на вычислении перемещений системы после деформации, и метод сил, который позволяет определить неизвестные усилия в лишних связях [1].

Сравнивая эти два метода, можно сказать, что метод сил является более простым и прямолинейным. Он позволяет быстро определить равновесие конструкции и выявить наиболее нагруженные элементы. Однако, он не учитывает деформации, которые происходят в конструкции под нагрузкой.

Метод перемещений более сложен, но более точен и учитывает деформации, возникающие в конструкции под нагрузкой. Он позволяет определить не только равновесие конструкции, но и ее деформации, что очень важно при проектировании более сложных и точных конструкций. Этот метод более выгоден при расчете рам с большим количеством реакций опор [2].

Таким образом, выбор между методом сил и методом перемещений зависит от характера конструкции и требуемой точности расчетов. В большинстве случаев используются оба метода, чтобы получить наиболее точные результаты.

Для примера возьмем статически неопределимую раму и проведем ее анализ (рисунок 1):

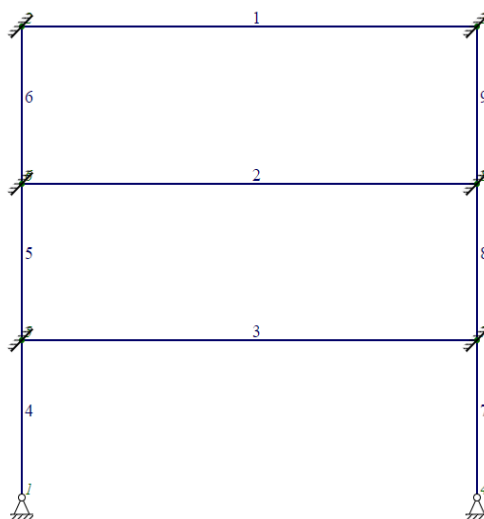


Рис. 1. Статически неопределимая рама

Посчитаем степень статической неопределимости рамы (рисунок 1) двумя методами. Расчет для метода сил:

$$n = n_{\text{внеш}} + n_{\text{внут}}$$
$$n_{\text{внут}} = 3K - \Pi_{\text{к}}, \text{ где}$$

$\Sigma_k$  – это суммарное количество шарниров в контурах,  $K$  – число контуров.

$$n_{\text{внеш}} = -W = 2\Sigma_d + C_0 - 3D, \text{ где}$$

$D$  – число дисков,  $\Sigma_d$  – число шарниров,  $C_0$  – число опорных стержней.

$$\begin{aligned} n_{\text{внут}} &= 3 \cdot 2 = 6 \\ n_{\text{внеш}} &= 2 \cdot 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1 \\ n &= 6 + 1 = 7 \end{aligned}$$

Таким образом, по методу сил рама имеет 7 лишних связей.

Метод перемещений:

Проведя визуальный анализ рамы, делаем вывод, что количество узлов между балками равно 6, отсюда следует, что число лишних связей рамы так же равно 6.

Вывод: по методу перемещений в этом случае посчитать данную раму будет менее трудозатратно, чем по методу сил. Так же метод перемещений проще в вычислении, так как для расчета будут пользоваться готовые шаблоны для лишних связей. А метод сил рассчитан на то, что сначала будут построены единичные эпюры от лишних связей.

### Приведения к базовой жесткости и решение системы уравнений.

Приведение к базовой жесткости конструкции необходимо, так как в разных частях рамы зачастую разная жесткость. Для приведения к базовой жесткости рамы необходимо расписать значение  $EI$  на каждом из участков, выбрать такой наименьший знаменатель значений жесткости, к которому приведет оставшиеся. Этот наименьший общий знаменатель и будет являться «единой» базовой жесткостью и, соответственно, коэффициентом пропорциональности между значениями.

При построении эпюры необходимо убрать  $i$ , так как это не более чем коэффициент пропорциональности между значениями, который не играет роли для построения. Из этого можно сделать вывод, что значения системы канонических уравнений не зависят от этого коэффициента. Для соблюдения формальности оформления свободные члены умножаются на  $i$ , так как пропорциональность не изменяется, данное умножение математически эквивалентно умножению на 1. В системе  $i$  опускается, другими словами, можно строить единичные эпюры без  $i$ , чтобы учесть базовую жесткость (Пример 1). Таким образом, базовая жесткость является коэффициентом пропорциональности и применяется для приведения всех значений к одному стандартному уровню жесткости.

**Задача 1.** Требуется составить систему канонических уравнений для схемы (рисунок 2).

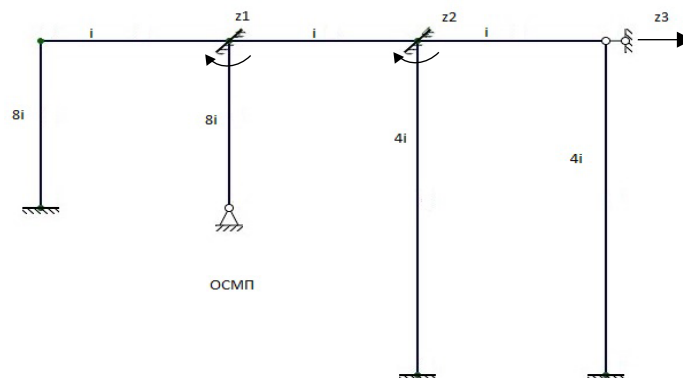


Рис. 2. Основная система

Система канонические уравнений

$$\begin{cases} r_{11} \cdot z_1 + r_{12} \cdot z_2 + r_{13} \cdot z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{12} \cdot z_1 + r_{22} \cdot z_2 + r_{23} \cdot z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31} \cdot z_1 + r_{32} \cdot z_2 + r_{33} \cdot z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Определение погонной жесткости:

$$AE; BF \frac{E4I}{1} = \frac{8EI}{2} = 8i; \quad CL; KD \frac{E4I}{2} = \frac{2EI}{1} = 4i;$$

$$EF; FL; LK \frac{E3I}{6} = \frac{EI}{2} = 1i; \quad i = \frac{EI}{2}.$$

$$\begin{cases} 31i \cdot z_1 + 2i \cdot z_2 - 8i \cdot z_3 + 45 = 0, \\ 2i \cdot z_1 + 23i \cdot z_2 - 12i \cdot z_3 + 7 = 0, \\ 24i \cdot z_1 + 12i \cdot z_2 - 31i \cdot z_3 + 14 = 0. \end{cases} = \begin{cases} 31 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 - 8 \cdot z_3 + 45 = 0, \\ 2 \cdot z_1 + 23 \cdot z_2 - 12 \cdot z_3 + 7 = 0, \\ 24 \cdot z_1 + 12 \cdot z_2 - 31 \cdot z_3 + 14 = 0. \end{cases}$$

Вывод: значения системы канонических уравнений не зависят от коэффициента  $i$ , следовательно, при построении единичных эпюр этот коэффициент не учитывается.

### Расчёт коэффициентов и свободных членов

В строительной механике существует несколько видов определения знаков коэффициентов, в зависимости от метода расчета и выбранной системы координат, таких как метод совмещения стержня с линией эпюры, метод единичных эпюр, метод проекций и метод внутренней работы. В рамках статьи более подробно рассмотрен метод совмещения стержня с линиями эпюр. [3]

Метод совмещения стержня с линией эпюры является более простым, чем ранее представленные методы. Знак  $Q$  удобно определять по виду эпюры  $M$  в соответствии с правилом (см. рисунок 3):

- если стержень на рассматриваемом участке рамы необходимо повернуть до совмещения с линией ординат на эпюре  $M$  по часовой стрелке – знак «+»;
- если против часовой стрелки – знак «-».

Это правило применимо и для криволинейных участков эпюры  $M$ . Точки на каждом участке графика эпюры соединяются прямыми линиями. Значения эпюры  $Q$  со знаком «+» обычно отображаются на внешних сторонах рамы. На участках эпюры  $Q$  ставятся соответствующие знаки. [4]

Коэффициенты для линейных перемещений вычисляются с использованием эпюры  $M$ , значение поперечной силы  $Q$  на участках рамы, соответствующих прямолинейным участкам эпюры  $M$ , может быть также вычислено из соотношения.

$$Q = \frac{dM_x}{dx} \approx tg\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона линии эпюры  $M$ .

Так же стоит отметить, что в балках, на которые действует распределенная нагрузка  $q$  значения свободных членов  $M_q$  на краях стержня будет равно значению опорных реакций, полученных при построении эпюры  $M_p$ .

Вывод: знаки коэффициентов определяются совмещением эпюры со стержнем. Поворот по часовой стрелке со знаком «+», против часовой стрелки «-».

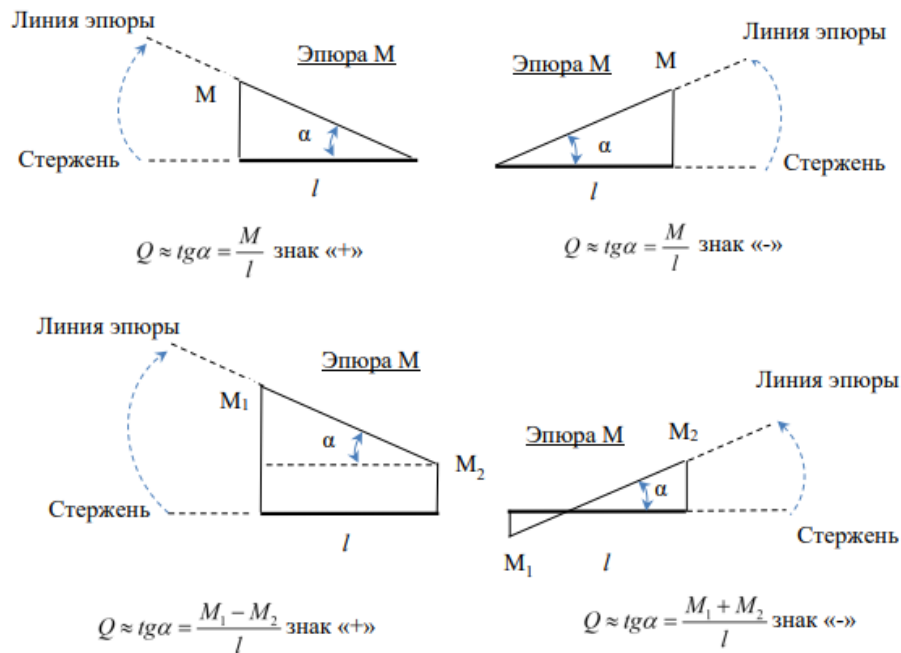


Рис. 3. Вычисление значений и определение знаков поперечной силы  $Q$  по соответствующим участкам эпюры  $M$  при использовании метода сечений

### Построение эпюр $M$ , перемножение и сложение эпюр.

Чтобы упростить построение эпюр  $M$  для балок с защемлением на концах (рисунок 4), необходимо воспользоваться справочными материалами. Сопоставив схемы балки и воздействия на неё с той, которая указана в таблице, можно определить значения реакций опор, эпюры и то, как будет выглядеть сама эпюра изгибающих моментов. Во избежание неоднозначности при расчете балки есть возможность не указывать знаки значений эпюр, достаточно мысленно сопоставить искомую балку с той, которая указана в справочнике. В соответствии с этим и следует расположить эпюру с указанием значений изгибающих моментов и реакций опор [5].

Чтобы построить  $M_{\text{итог}}$  необходимо воспользоваться уравнением:

$$M_{\text{итог}} = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + M_3 \cdot Z_3 + M_p$$

Как видно из уравнения для начала необходимо построить эпюры  $M_1 \cdot Z_1$ ,  $M_2 \cdot Z_2$ ,  $M_3 \cdot Z_3$   $M_p$ , а затем их сложить.

Чтобы выполнить такие действия, можно воспользоваться двумя способами:

- рассчитанные значения записать в таблицу;
- построить эпюры рядом друг с другом, а затем соответствующие значения на участках складывать между собой с соответствующим знаком.

В методических указаниях Т.И. Смышляевой эпюра  $M_{\text{итог}}$  строится с помощью записей в таблице. Данный способ не очень удобен, так как можно легко запутаться в значениях моментов, в расположении эпюр [4].

Выбор делаем в пользу второго способа, так как он проще и надежнее. Гораздо удобнее складывать эпюры между собой, когда ты видишь какие значения, имеют эпюры на разных участках и с каким знаком, и, соотнося эти значения между собой, можно точно построить эпюру  $M_{\text{итог}}$ .

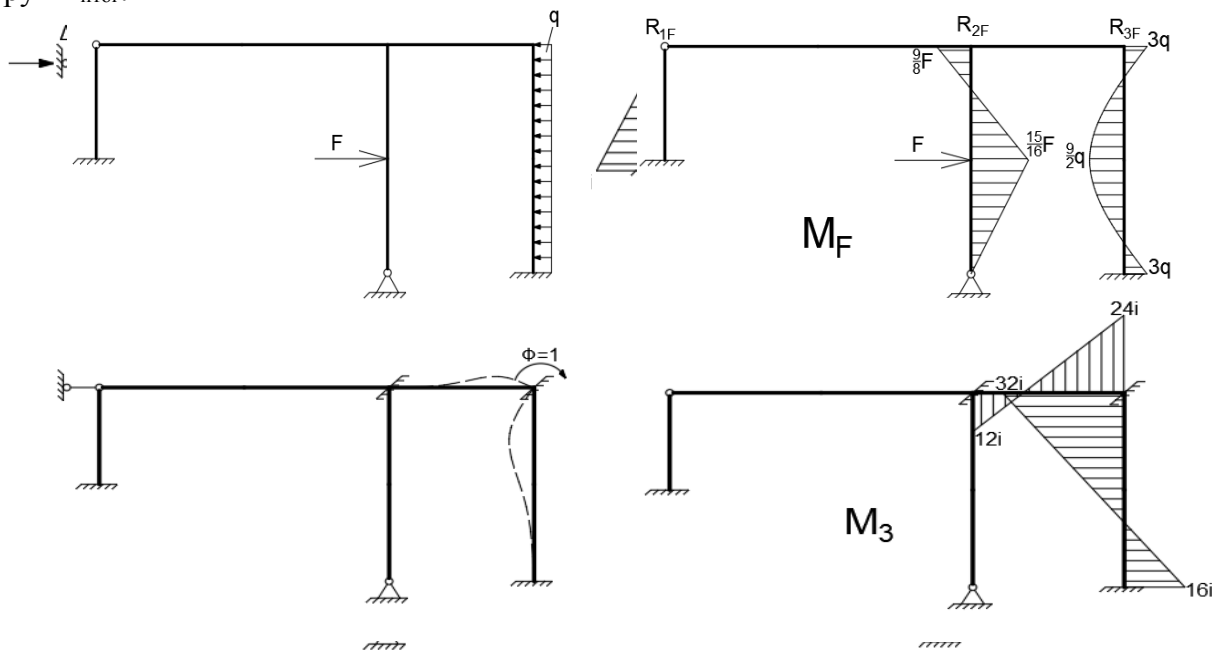


Рис. 4. Схемы и эпюры моментов

$$M_{\text{итог}} = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + M_3 \cdot Z_3 + M_p$$

Определим значения  $Z_1, Z_2, Z_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{28i}{3} \cdot Z_1 - 6i \cdot Z_2 - \frac{8i}{3} \cdot Z_3 + 39,185 = 0 \\ -8i \cdot Z_1 + 57i \cdot Z_2 + 12i \cdot Z_3 + 31,5 = 0 \\ -8i \cdot Z_1 + 12i \cdot Z_2 + 56i \cdot Z_3 - 24 = 0 \end{array} \right.;$$

$$Z_1 = \frac{4,031}{i}; \quad Z_2 = \frac{-0,208}{i}; \quad Z_3 = \frac{1,049}{i};$$

Определим сечения рамы (рисунок 5):

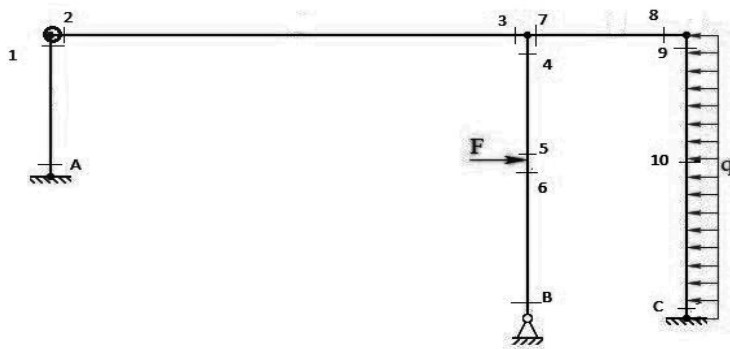


Рис. 5. Сечения рамы

Построим эпюру моментов:

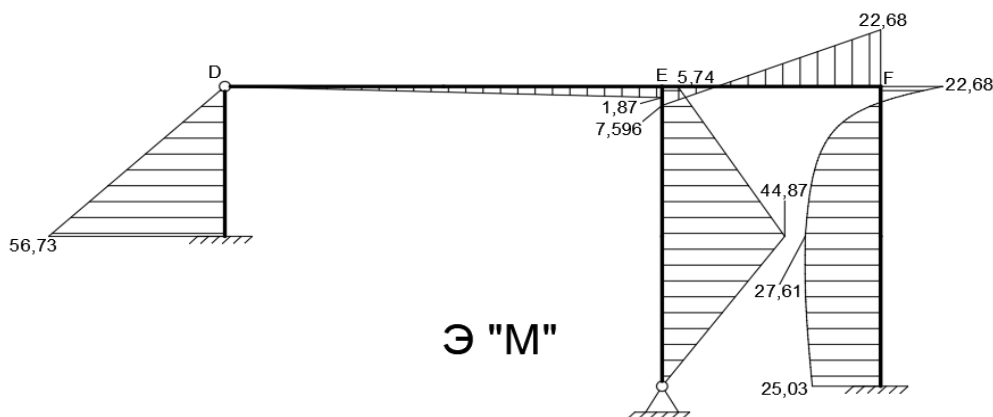


Рис. 6. Эпюра моментов

Вывод: эпюра  $M$  (рисунок 6) строится с помощью готовых справочных материалов для участков рамы с заданной на них усилиями, сложение эпюр выполняется с помощью сравнения других эпюр, построенных друг напротив друга, для более точного построения эпюры  $M_{\text{итог}}$

#### Порядок построения $Q_{\text{итог}}$ на участке $q$ ; сравнение двух способов.

Эпюра  $Q$  – это график распределения сил в элементах конструкции или системы при определенной нагрузке. При построении итоговой эпюры для поперечных сил можно воспользоваться двумя способами:

- построение эпюры с помощью реакций опор;
- представление криволинейного участка в виде шарнирно опертой балки с распределенной нагрузкой  $q$  и сосредоточенными моментами в опорах.

Сравним эти для способа, для нахождения более надежного и менее трудозатратного.

Рассмотрим основные этапы построения эпюры с помощью расчета реакций опор:

– с помощью готовых шаблонов для участка с распределенной нагрузкой рассчитываем реакции на концах участка с помощью эпюры  $M$ ;

– строится эпюра  $Q$  с учетом рассчитанных реакций опор и их направления.

Последовательность построения эпюры  $Q$  с помощью шарнирно опертой балки:

- строится балка на двух опорах;
- расставляются внешние усилия в соответствии с их направлениями и знаками в виде распределенной нагрузки и сосредоточенных моментов в опорах, которые ставятся в соответствии с эпюрой  $M_{\text{итог}}$  (рисунок 7);

– с помощью уравнений равновесия рассчитываются реакции опор в балке (рисунок 8);

– в соответствии с рассчитанными реакциями строится эпюра  $Q$  с соответствующими знаками (рисунок 9).

Способ 1:

На участке с распределенной нагрузкой рассчитываются опорные реакции:

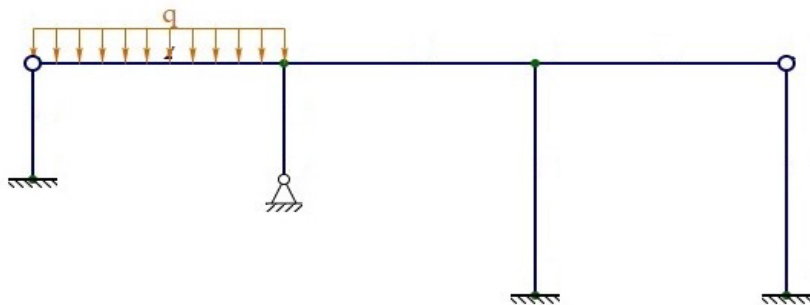


Рис. 7. Схема рамы с распределенной нагрузкой

$$R = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l = 18,75 \text{ кН}$$

$$R = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l = 11,25 \text{ кН}$$

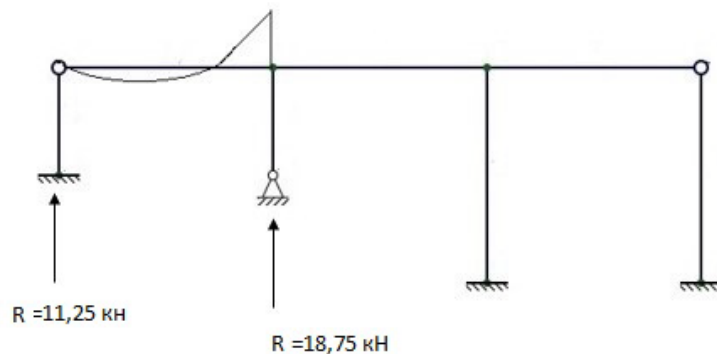


Рис. 8. Эюра реакций опор

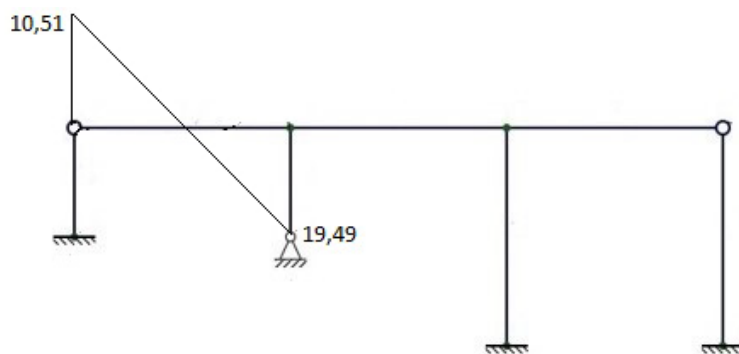


Рис.9. Эюра поперечных сил на участке с распределенной нагрузкой

Способ 2 (рисунок 10):

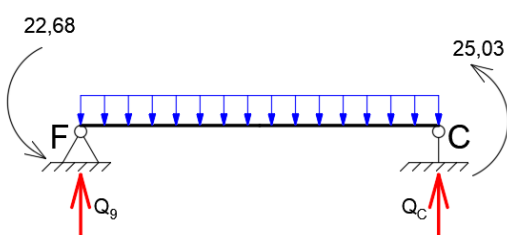


Рис. 10. Схема участка с распределенной нагрузкой

$$\text{Сечение 9; } Q_9 = \frac{22,68 + 144 + 25,03}{6} = 31,952 \text{ кН;}$$

$$\text{Сечение C; } Q_c = \frac{144 - 22,68 - 25,03}{6} = 16,048 \text{ кН;}$$

Рассмотрев порядок расчета эюры  $Q$  данными способами, можно сделать вывод, что первый способ менее трудоемок, возможность совершить ошибку не значительна. Важно не ошибиться в расчете реакций опор и построении на основании знака.

### Итоговая проверка

После построения всех эюр проводится итоговая проверка правильности расчетов по выполнению условия  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ . В эти суммы с учетом направления входят все внешние силы, приложенные к заданной раме, включающие нагрузки и опорные реакции. Реакции в опорах равны значениям и поперечных и продольных сил в соответствующих



сечения рамы противоположны их направлениям. Эти значения определяются из построенных итоговых эюр Q и N.

Результаты проверки целесообразно представлять аналитически и отобразить графически на расчетной схеме заданной системы (рисунки 11-13).

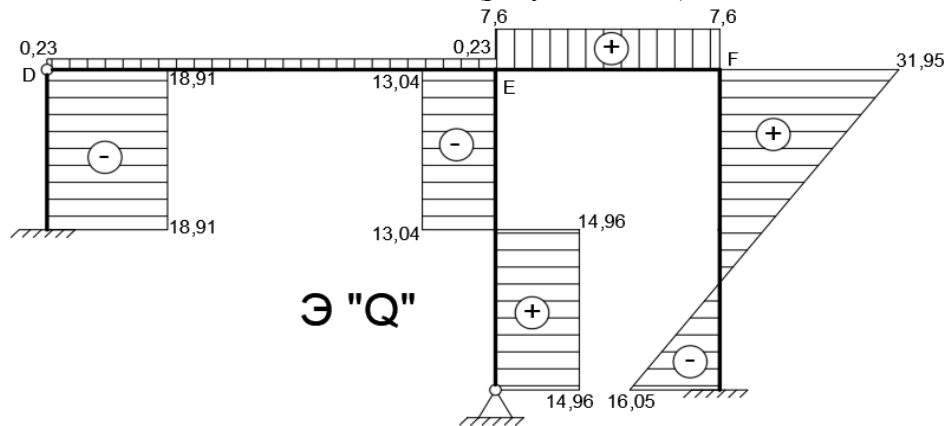


Рис. 11. Эюра поперечных сил

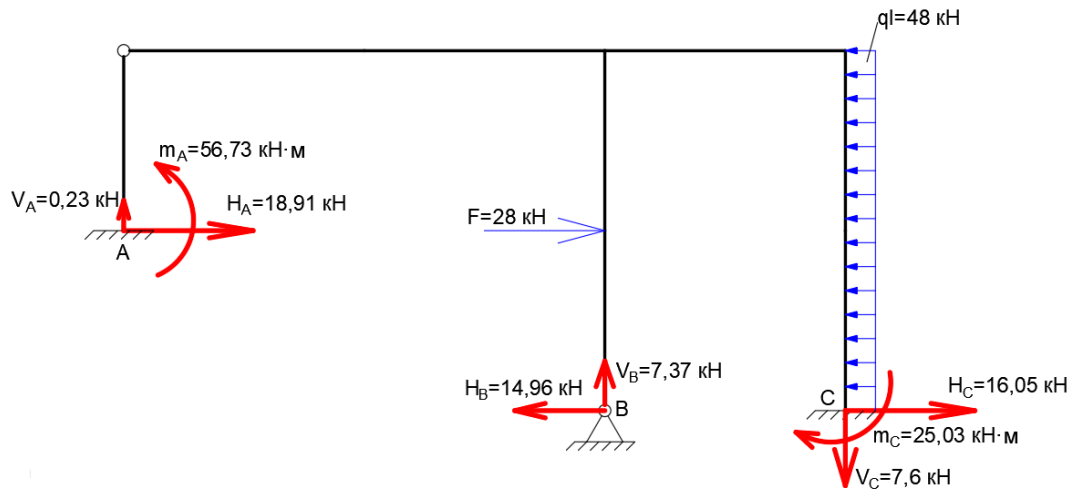


Рис. 12. Рама для итоговой проверки

$$\sum F_{ix} = 0; H_A - H_B + H_C - qb + F = 0; 18,91 - 14,96 + 9,17 + 16,05 - 48 + 28 = 0 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iy} = 0; V_A + V_B - V_C = 0; 0,23 + 7,37 - 7,6 = 0 \text{ кН};$$

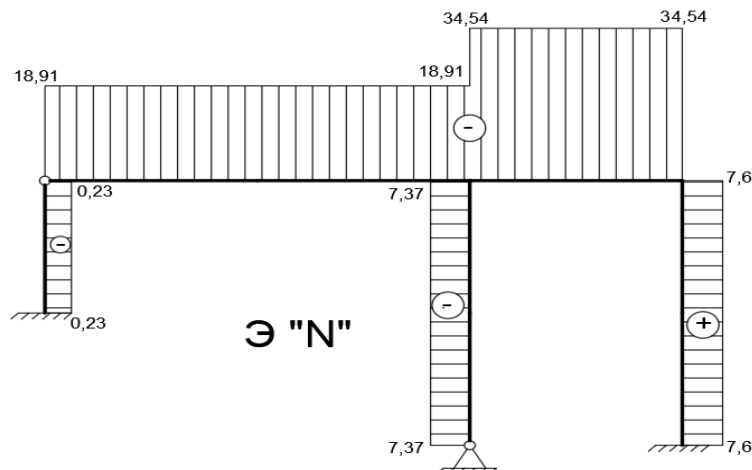


Рис. 13. Эюра продольных сил

## Заключение

Таким образом, резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, о полученных результатах анализа:

– метод перемещений для определения статической неопределимости является наиболее удачным, так как в нем используются готовые шаблоны для лишних связей, а это значит, что на расчет уходит меньше времени;

– было доказано, что системы канонических уравнений не зависят от коэффициента  $i$ , он не влияет на построение единичных эпюр;

– эпюра  $M$  строится с применением готовых справочных материалов, а сложение эпюр производится построением эпюр друг напротив друга, для более точного построения итоговой эпюры моментов;

– при сравнении двух способов построения эпюры  $Q$ , было определено, что первый способ, с нахождением реакций опор на участке с распределенной нагрузкой, является менее трудоемким, возможность совершить ошибку при расчетах минимальна.

При сравнении метода перемещений и метода сил был рассмотрел расчет статической неопределимости рамы, в ходе этого расчета выяснилось, что метод перемещений является более легким, так как при этом расчете используются готовые шаблоны, а значит, что процент совершения ошибки мал.

По методу перемещений в этом случае посчитать данную раму будет менее трудозатратно, чем по методу сил. Так же метод перемещений проще в вычислении, так как для расчета будут пользоваться готовые шаблоны для лишних связей. А метод сил рассчитан на то, что сначала будут построены единичные эпюры от лишних связей. Для нахождения статической неопределимости по методу сил были использованы следующие формулы:

$$n = n_{\text{внеш}} + n_{\text{внут}}$$

$$n_{\text{внут}} = 3K - \Sigma \kappa$$

$$n_{\text{внеш}} = -W = 2\Sigma d + C_0 - 3D$$

А по методу перемещений мы визуальным образом может определить статическую неопределимость рамы, не прибегая к расчету.

Метод перемещений является одним из наиболее эффективных методов для расчета статически неопределенных рам. Его особенность заключается в том, что он позволяет рассчитать не только реакции опор, но и перемещения всех узлов конструкции.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 12. – Москва : Лань, 2010. – 656 с.

2. Верюжский Ю.В., Гольшева А.Б., Колчунов В.И., Ключева Н.В., Лисицин Б.М. Справочное пособие по строительной механике: учебное пособие: в 2т. М.: Издательство АСВ, 2014. Т. 1. 640с.; Т.11. 432 с.)

3. Саргсян А.Е. Строительная механика.-М. : АСВ, 1998.-311с.: ил.

4. Методические указания/ сост. Т.И. Смышляева, Л.А. Адамов.- Иркутск: ИрГУПС, 2011.-28с .

5. Строительная механика : практикум для самостоятельной работы студентов./ Тихий И.И. – Иркутск : ИрГУПС, 2015.– 29 с.

## REFERENCES

1. Darkov A.V. CONSTRUCTION MECHANICS / A.V. Darkov, N.N. Shaposhnikov. - 12. – Moscow : Lan, 2010. – 656 p.

2. Veryuzhsky Yu.V., Golysheva A.B., Kolchunov V.I., Klyucheva N.V., Lisitsyn B.M. Reference manual on construction mechanics: textbook: in 2t. M.: Publishing House DIA, 2014. Vol. 1. 640s.; Vol. 11. 432 p.)
3. Sargsyan A.E. Construction Mechanics.-M. : DIA, 1998.-311s.: ill.
4. Methodological guidelines / comp. T.I. Smyshlyaeva, L.A. Adamov.- Irkutsk: IrGUPS, 2011.-28 p.
5. Construction mechanics: a workshop for independent work of students./ Tikhy I.I. – Irkutsk: IrGUPS, 2015.– 29 p.

#### **Информация об авторах**

*Алексеева Дарья Владимировна* – студент 3 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация, email: darya-alex603@mail.ru

*Верянская Алина Эдуардовна* – студент 3 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация, email: lina.veryanskaya.02@mail.ru

*Тихий Иван Иванович* – профессор кафедры «Физика, механика и приборостроение», Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация, email: tiviv@list.ru

#### **Information about the authors**

*Alekseeva Darya Vladimirovna* – 3rd year student of the specialty "Construction of railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, email: darya-alex603@mail.ru

*Veryanskaya Alina Eduardovna* – 3rd year student of the specialty "Construction of railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, email: lina.veryanskaya.02@mail.ru

*Tikhy Ivan Ivanovich* – Professor of the Department of «Physics, Mechanics and Instrumentation», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation, email: tiviv@list.ru