

*Р. С. Большаков*¹, *А. К. Мозалевская*¹

¹*Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНЫХ РЕАКЦИЙ В МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

Аннотация. Рассматриваются особенности математического моделирования при определении полных реакций в механической колебательной системе с твердым телом на упругих опорах при наличии дополнительных упругих связей с учетом пространственной метрики их присоединения. Дополнительные связи реализуются при помощи упругих элементов. Наличие большого количества упругих элементов, соединённых с опорной поверхностью, усложняет построение математических моделей исследуемого технического объекта, так как количество точек соединения увеличивается вдвое. Получены передаточные функции по координатам движения твердого тела. Математические модели построены на основе подходов, характерных для структурного математического моделирования. Приведены аналитические выражения для определения полных реакций в исследуемой системе в достаточно сложной форме и с учетом статической и динамической составляющих.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамические реакции связей, передаточные функции.

*R. S. Bolshakov*¹, *A. K. Mozalevskaya*¹

¹*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation*

IDENTIFICATION OF FULL REACTIONS IN A MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEM WITH RIGID BODY ON ELASTIC SUPPORTS

Abstract. The features of mathematical modeling in determining complete reactions in a mechanical oscillatory system with a rigid body on elastic supports in the presence of additional elastic bonds are considered, taking into account the spatial metric of their attachment. Additional connections are realized with the help of elastic elements. The presence of a large number of elastic elements connected to the support surface complicates the construction of mathematical models of the technical object under study, since the number of connection points doubles. Transfer functions for the coordinates of motion of a rigid body are obtained. Mathematical models are based on approaches typical of structural mathematical modeling. Analytical expressions are given to determine the complete reactions in the system under study in a rather complex form and taking into account the static and dynamic components.

Keywords: mathematical modeling, dynamic reactions of ties, transfer functions.

Введение

В условиях быстрого роста промышленного производства, характерного для многих отраслей – как сырьевых, так и высокотехнологичных – увеличивается потребность в использовании технологических машин и инструментов [1–3]. Одной из актуальных задач является повышение срока службы и надежности вибрационных установок, применяемых в разнообразных технологических процессах [4–6].

Современное развитие промышленности характеризуется высоким темпом технологического прогресса, расширением производственных мощностей и усложнением технологических процессов. В этом контексте особое значение приобретает использование специализированных машин и оборудования, обеспечивающих выполнение широкого спектра технологических операций.

Одним из ключевых направлений в этой области является развитие вибрационных технологических машин – устройств, основанных на использовании колебательных процессов для достижения технологических целей. Вибрационные машины находят широкое применение в различных отраслях промышленности, таких как машиностроение, стройиндустрия, металлургия, химическая промышленность, добыча ископаемых, а также в

энергетике и пищевой промышленности.

Основные технологические преимущества вибрационных машин связаны с их способностью к эффективному воздействию на материалы за счет механических колебаний, что способствует улучшению физических и технологических свойств обрабатываемых объектов. Однако при этом реализуемые процессы связаны с рядом сложных физических явлений, обусловленных динамическими свойствами системы, взаимодействиями между компонентами, условиями эксплуатации и внешними воздействиями. Важной задачей является глубокое понимание и моделирование динамических процессов, протекающих в вибрационных машинах, поскольку именно от их точного анализа зависит эффективность, надежность и долговечность оборудования.

Моделирование вибрационных систем включает в себя анализ их собственных частот, амплитудно-частотных характеристик, реакций на внешние воздействия, а также взаимодействий между различными элементами конструкции. При этом важными аспектами являются изучение связанных процессов, анализ устойчивости режимов, а также определение условий, при которых достигается оптимальное соотношение между технологической эффективностью и ресурсосбережением.

В предлагаемой статье рассматривается определение полных реакций в механической колебательной системе с твердым телом на упругих опорах при наличии дополнительных пружин.

I. Общие положения

Колебательные процессы занимают ключевое место в реализации технологических операций на производстве. Научные исследования в области вибрационных технологических машин охватывают широкий спектр проблем, связанных с теорией колебаний, математическим моделированием, экспериментальными методами, системами автоматического управления, диагностикой и мониторингом. Важной задачей является интеграция этих направлений для создания комплексных решений, обеспечивающих высокую надежность, точность и экономическую эффективность работы оборудования.

Важным аспектом является также изучение взаимодействий вибрационных систем с внешней средой и технологическими материалами. Влияние таких факторов, как сопротивление окружающей среды, температурные режимы, влажность, электромагнитные и механические воздействия, существенно влияет на динамические свойства машин и требует проведения дополнительных исследований. Анализ этих факторов позволяет разработать более устойчивые конструкции и повысить эксплуатационные характеристики оборудования.

Исследуется вариант введения дополнительных элементов в конструкцию системы (k_1, k_2, k_3, k_4), показанный на рис. 1 [7].

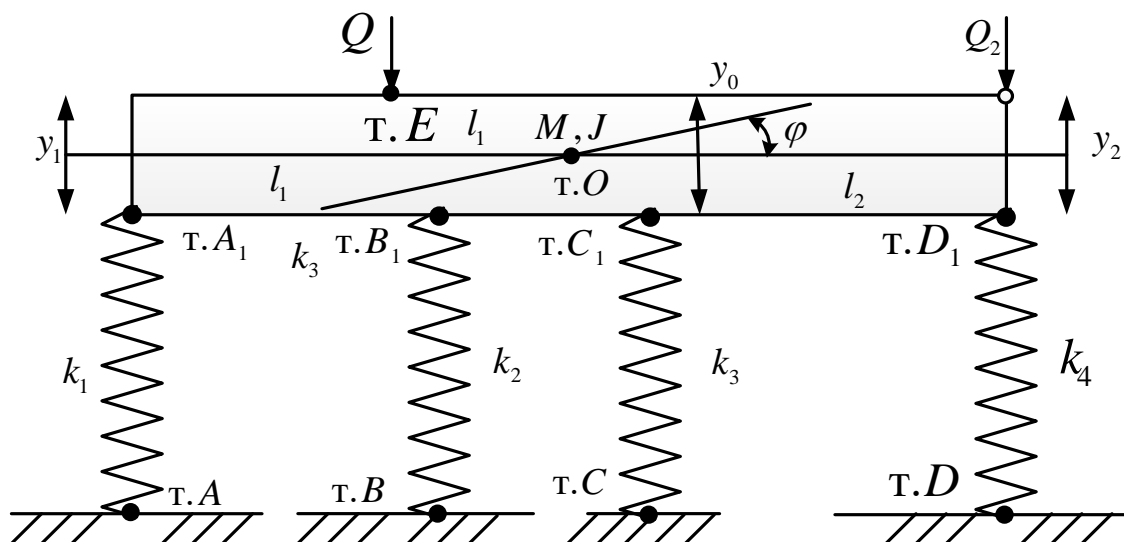


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы

На систему действует внешняя гармоническая сила, приложенная в точке E , а ее движение задается координатами y_1 , y_2 и y_0 , а также углом φ на неподвижной базе [4]. Связи между системами координат задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y_{B1} &= y_1(a + cl_{B1}) + y_2(b - l_{B1}c), a_1 = a + cl_{B1}, \\ b_1 &= b - l_{B1}c, y_{C1} = y_1(a - cl_{C1}) + y_2(b + l_{C1}c), \\ a_3 &= a - cl_{C1}, b_3 = b + l_{C1}c. \end{aligned} \quad (1)$$

Запишем для системы координат y_1 и y_2 выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{y}_1 a + \dot{y}_2 b)^2 + \frac{1}{2} J c^2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2; \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_4 y_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_1 a_1 + y_2 b_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_1 a_2 + y_2 b_2)^2, \quad (3)$$

где $a_1 = a + cl_{B1}$, $b_1 = b - cl_{B1}$, $a_2 = a - cl_{C1}$, $b_2 = b + cl_{C1}$.

Система уравнений в операторной форме после преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 \left[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1 + k_2 a_1^2 + k_3 a_2^2 \right] - \\ - \bar{y}_2 \left[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_1 + k_2 a_1 b_1 + k_3 a_2 b_2 \right] &= \bar{Q}a + \bar{Q}a_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 \left[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_4 + k_2 b_1^2 + k_3 b_2^2 \right] - \\ - \bar{y}_1 \left[(Jc^2 - Mab)p^2 + k_2 a_1 b_1 + k_3 a_2 b_2 \right] &= \bar{Q}b + \bar{Q}a_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_3 = \frac{l_E}{l_1 + l_2}$, когда передаточные функции, полученные из этих уравнений, позволяют

построить модели для определения динамических характеристик системы, включая реакции связей и межпарциальные связи в опорных элементах.

На основании уравнений движения в операторной форме построена структурная схема, представляющая собой динамический аналог (рис. 2)

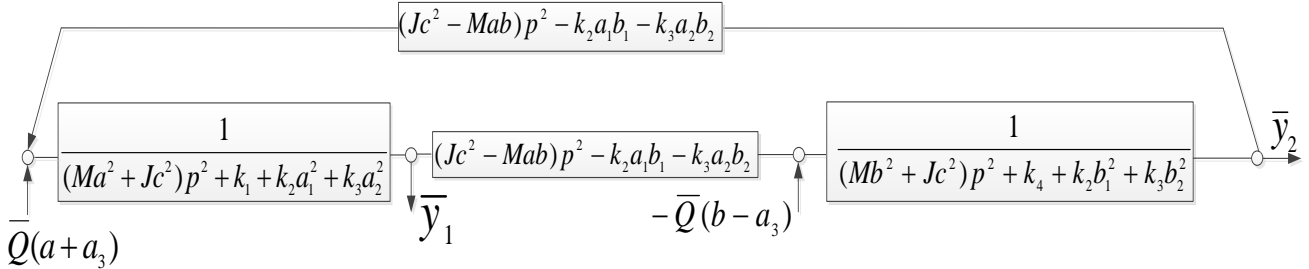


Рис. 2. Структурная математическая модель системы по рис. 1

II. Математическое моделирование при оценке выражений для полных реакций связей системы

Определение реакции включает оценку как статической, так и динамической составляющих, что дает полное представление о реакции системы. Динамические смещения в указанных точках рассчитываются с помощью передаточных функций $W'_1(p)$ и $W'_2(p)$. Чтобы построить эти функции, необходимо учитывать пространственную конфигурацию системы и расположение точек закрепления упругих элементов.

Статические реакции определяются при помощи выражений для передаточных функций [7] при отсутствии силовых или кинематических возмущений, действующих на механическую колебательную систему. Существующая методология, характерная для структурной теории виброзащитных систем, позволяет определять и статические и динамические реакции с использованием выражений для приведённых жесткостей соответствующих частей систем с той лишь разницей, что динамические реакции определяются с приложением возмущающего

воздействия. Сумма двух этих компонентов определяет полные реакции в точках крепления упругих элементов.

Полные реакции в точках системы выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{A1}^{полн.} = & \bar{y}_{A1}k_1 + \\ & (a + a_3)[k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2] + \\ & + \frac{(a_3 - b)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]}k_1, \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{B1}^{полн.} = & k_2(a + cl_{B1})\bar{y}_1 + k_2(b - cl_{B1})\bar{y}_2 + \\ & + k_2(a + cl_{B1})\frac{(a + a_3)[k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2] + \\ & + (a_3 - b)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]} \times \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2 \\ & \dots \frac{(a_3 - b)[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2] - \\ & - (a + a_3)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]} \times \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2 + \\ & + k_2(b - cl_{B1})\frac{(a_3 - b)[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2] - \\ & - (a + a_3)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]} \times \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2, \\ \bar{R}_{C1}^{полн.} = & k_3(a - cl_{C1})\bar{y}_1 + k_3(b + cl_{C1})\bar{y}_2 + \\ & (a + a_3)[k_4 + k_2b_1^2 + k_3b_2] + \\ & + k_3(a - cl_{C1})\frac{(a_3 - b)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]} \times \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - \\ & - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2 \\ & (a_3 - b)[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2] - \\ & + k_3(b + cl_{C1})\frac{(a + a_3)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]} \times \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - \\ & - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2, \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}_{D1}^{полн.} = & \bar{y}_{D1}k_4 + \\ & (a_3 - b)[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2] - \\ & + \frac{(a + a_3)[k_2a_1b_1 + k_3a_2b_2]}{[k_1 + k_2a_1^2 + k_3a_2^2]}k_4 \cdot \\ & \times [k_4 + k_3b_2^2 + k_2b_1^2] - [-k_2a_1b_1 - k_3a_2b_2]^2 \quad (9)\end{aligned}$$

Анализ формул показывает, что структура как динамических, так и статических реакций достаточно сложна и содержит множество взаимосвязанных элементов, несмотря на ограниченное число упругих компонентов. Наличие собственных частот системы приводит к

увеличению реакций именно на этих частотах.

Полученные выражения для реакции требуют внимательного анализа при оценке влияния внутренних силовых факторов, особенно в условиях наличия неуравновешенностей и зазоров.

Заключение.

Рассматриваемая модель механической вибрационной системы включает многочисленные связи, параметры которых можно настраивать для достижения устойчивых режимов работы оборудования. Проведенные исследования продемонстрировали пригодность используемых подходов для точного описания динамического поведения системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каргапольцев, С. К. Способы определения термических остаточных напряжений в заготовках типа плит из алюминиевых сплавов / С. К. Каргапольцев, А. К. Мозалевская // Системы. Методы. Технологии. – 2023. – № 4(60). – С. 27-32. – DOI 10.18324/2077-5415-2023-4-27-32. – EDN NAUKUK.
2. Александров, А. А. Влияние растяжения заготовок на уровень термических остаточных напряжений / А. А. Александров, А. В. Лившиц // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 4(52). – С. 66-69. – EDN XEFCHN.
3. Butorin, D. V. Design of the tooling of a complex geometric shape for electrothermal processing of the polymer covering plate of the bogie friction wedge / D. V. Butorin, A. G. Larchenko, A. A. Aleksandrov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering : International Conference on Transport and Infrastructure of the Siberian Region, SibTrans 2019, Moscow, 21–24 мая 2019 года. Vol. 760. – Moscow: Institute of Physics Publishing, 2020. – P. 012011. – DOI 10.1088/1757-899X/760/1/012011. – EDN DJXCCJ.
4. Патент № 2689901 С2 Российская Федерация, МПК F16F 15/02, F16F 7/10. Устройство управления вибрационным полем технологической машины : № 2017140746 : заявл. 22.11.2017 : опубл. 29.05.2019 / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков, А. В. Елисеев [и др.] ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИрГУПС). – EDN KTQODK.
5. Каргапольцев, С. К. Современные технологии диагностики остаточных напряжений / С. К. Каргапольцев, А. К. Мозалевская // Системы. Методы. Технологии. – 2024. – № 3(63). – С. 15-25. – DOI 10.18324/2077-5415-2024-3-15-25. – EDN DQXVFO.
6. Мозалевская, А. К. К вопросу о применении обобщенного метода определения реакций связей в соединениях элементов механических колебательных систем / А. К. Мозалевская // Проблемы механики современных машин : материалы VII Международной научной конференции, Улан-Удэ, 25–30 июня 2018 года. Том 1. – Улан-Удэ: Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2018. – С. 51-55. – EDN VOPGZF.
7. Каргапольцев, С. К. Определение динамических взаимодействий в механической колебательной системе с дополнительными связями / С. К. Каргапольцев, Р. С. Большаков // Системы. Методы. Технологии. – 2024. – № 4(64). – С. 7-14. – DOI 10.18324/2077-5415-2024-4-7-14. – EDN AAEOXF.

REFERENCES

1. Kargapoltsev, S. K. Methods for determining thermal residual stresses in blanks such as aluminum alloy plates / S. K. Kargapoltsev, A. K. Mozalevskaya // The system. Methods. Technologies. – 2023. – № 4(60). – Pp. 27-32. – DOI 10.18324/2077-5415-2023-4-27-32. – EDN NAUKUK.
2. Alexandrov, A. A. The influence of stretching of workpieces on the level of thermal residual stresses / A. A. Alexandrov, A.V. Livshits // Modern technologies. System analysis. Modeling. –

2016. – № 4(52). – Pp. 66-69. – EDN XEFCHN.

3. Butorin, D. V. Design of the tooling of a complex geometric shape for electrothermal processing of the polymer covering plate of the bogie friction wedge / D. V. Butorin, A. G. Larchenko, A. A. Aleksandrov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering : International Conference on Transport and Infrastructure of the Siberian Region, SibTrans 2019, Moscow, May 21-24, 2019. Vol. 760. – Moscow: Institute of Physics Publishing, 2020. – P. 012011. – DOI 10.1088/1757-899X/760/1/012011. – EDN DJXCCJ.

4. Patent No. 2689901 C2 Russian Federation, IPC F16F 15/02, F16F 7/10. Vibration field control device of a technological machine : No. 2017140746 : application 22.11.2017 : published 29.05.2019 / S. V. Eliseev, R. S. Bolshakov, A.V. Eliseev [et al.] ; applicant Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Irkutsk State University of Communications (FSBEI HE IrGUPS). – EDN KTQODK.

5. Kargapol'tsev, S. K. Modern technologies for diagnostics of residual stresses / S. K. Kargapol'tsev, A. K. Mozalevskaya // The system. Methods. Technologies. – 2024. – № 3(63). – Pp. 15-25. – DOI 10.18324/2077-5415-2024-3-15-25. – EDN DQXVFO.

6. Mozalevskaya, A. K. On the application of a generalized method for determining bond reactions in compounds of elements of mechanical oscillatory systems / A. K. Mozalevskaya // Problems of mechanics of modern machines : proceedings of the VII International Scientific Conference, Ulan-Ude, June 25-30, 2018. Volume 1. Ulan-Ude: East Siberian State University of Technology and Management, 2018. pp. 51-55. - EDN VOPGZF.

7. Kargapol'tsev, S. K. Determination of dynamic interactions in a mechanical oscillatory system with additional connections / S. K. Kargapol'tsev, R. S. Bolshakov // Systems. Methods. Technologies. – 2024. – № 4(64). – Pp. 7-14. – DOI 10.18324/2077-5415-2024-4-7-14. – EDN AAEOXF.

Информация об авторах

Большаков Роман Сергеевич - к.т.н., доцент кафедры «Управление эксплуатационной работой», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: Bolshakov_rs@mail.ru

Мозалевская Анна Константиновна – старший преподаватель кафедры «Строительство железных дорог, мостов и тоннелей», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mozalevskay@mail.ru

Information about the authors

Bolshakov Roman Sergeevich - candidate of technical Sciences, associate Professor of the Department "operational work Management", Irkutsk state University of railway transport, Irkutsk, e-mail: Bolshakov_rs@mail.ru

Mozalevskaya Anna Konstantinovna – Senior lecturer of the Department «Construction of Railways, Bridges and Tunnels», Irkutsk state University of railway transport, Irkutsk, e-mail: mozalevskay@mail.ru