УДК 51.7

М.И. Зелова, А.А. Елизарьева, И.А. Елизарьев, Т.Н. Черняева
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MATHCAD 15

Аннотация. *В предложенной статье рассмотрена постановка транспортной задачи линейного программирования, касающаяся железнодорожных перевозок. Рассмотрено построение первоначального опорного плана методом наименьшей стоимости и представлено решение задачи в программной среде Mathcad 15. Выполненная работа представляет алгоритм реализации транспортной задачи, который может использоваться на практике торговыми предприятиями, занимающимися различного рода поставками, перевозками.*

Ключевые слова: *транспортная задача, линейное программирование, метод наименьшей стоимости, программная среда Mathcad, оптимальный план перевозок.*

M.I. Zelova, A.A. Elizaryeva, I.A. Elizaryev, T.N. Chernyaeva
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

SOLUTION OF THE TRANSPORT TASK OF LINEAR PROGRAMMING IN THE SOFTWARE ENVIRONMENT MATHCAD 15

Abstract. *In the proposed article, the formulation of a linear programming transport task concerning railroad transportation is considered. The construction of the initial baseline plan by the least cost method is considered and the solution of the task in the Mathcad 15 software environment is presented. The work done proposes an algorithm for the implementation of the transport task, which can be applied in practice by trade enterprises engaged in various kinds of deliveries and transportation.*

Keywords: *transport task, linear programming, least cost method, Mathcad software environment, optimal transportation plan.*

Введение

В связи с развитием обширной транспортной сети и интенсивным обменом товарами, продукцией между регионами, предприятиями, странами, большое значение приобретает решение задач, в которых составление порядка перевозок отдельного однородного продукта от пунктов производства к пунктам потребления различными видами транспорта осуществляется с целью минимизации затрат. Данные задачи являются задачами оптимизации [2]. Оптимизация – определение наиболее целесообразного варианта среди многих, то есть лучшего с точки зрения намеченной идеи [1].

Решить содержательно задачи оптимизации позволяют не только общие математические методы, но и системы автоматизированного проектирования, которые существенно облегчают процесс решения и уменьшают затраты времени.

Постановка и математическая модель транспортной задачи

Транспортная задача (далее - ТЗ) – математическая задача линейного программирования с особой структурой. Имеется n потребителей отдельного товара, которые расположены в пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, при этом их потребности известны и равны $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Товар, о котором идет речь, создается m предприятиями $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ в численностях, равных соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Их также называют запасами. Числа c_{ij} представляют затраты, необходимые для доставки единицы товара от производителя Q_i к потребителю B_j (например, расстояния, стоимости и т.д.), а x_{ij} – соответствующее количество товара:

Матрицы затрат и плана перевозок представлены в формуле (1):

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots & c_{1n} \\ \cdots \cdots & \cdots \\ c_{m1} \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots & x_{1n} \\ \cdots \cdots & \cdots \\ x_{m1} \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

В виде целевой функции обозначаются суммарные затраты на перевозки:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min . \qquad (2)$$

Сумма поставок товара данному потребителю от производителей есть сумма элементов j-го столбца матрицы X. Эта величина должна быть равна потребности b_j:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n .$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m , \qquad (3)$$

т.е., сумма поставок товара утвержденным потребителям от заданного производителя равна запасам утвержденного производителя. Иначе говоря, обе стороны должны получить выгоду: потребности должны быть удовлетворены, запасы – вывезены.

Задача может быть решена при соблюдении уравнения баланса, т.е. суммарные запасы производителей равны суммарным потребностям потребителей. В таком случае транспортная задача имеет решение (необязательно единственное)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (4)$$

Тогда говорят о *закрытой* модели транспортной задачи с *правильным балансом* (иначе – *открытая* модель с неправильным балансом) [2].

Еще один вид ограничений:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} . \qquad (5)$$

Таким образом, мы имеем дело с задачей ЛП в канонической форме.

Теперь рассмотрим *транспортную таблицу* (табл.1). В ее внутренних клетках в левом верхнем углу записывают затраты на единицу груза, в правом нижнем углу – количество единиц груза.

Табл.1. Транспортная таблица

Потребители / Производители	B_1	B_2	...	B_n	Запасы
Q_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
Q_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
Q_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_m	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$

Рассмотрим транспортную задачу, связанную с железнодорожными перевозками, построение оптимального плана которой осуществимо методом наименьшей стоимости.

Задача. На станциях Суховская, Черемхово, Зима сосредоточены запасы угля в количествах 110, 190, 90 т соответственно. Груз необходимо поставить на станции Мальта, Белая, Забитуй, Мегет, потребность которых составляет 80, 60, 170, 80 т соответственно. Стоимость доставки 1 т угля со станции Суховская в пункты назначения соответственно равна – 8, 1, 9, 7 ден. Ед.; со станции Черемхово – 4, 6, 2, 12 ден. ед.; со станции Зима – 3, 5, 8, 9 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок, при котором цена перевозки (c_{ij}) была наименьшая.

Построение начального опорного плана методом наименьшей стоимости

Запишем исходные данные в виде таблицы (Табл.2).

Табл.2. Исходные данные

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (A_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы (a_i)**
ст. Суховская	8	1	9	7	110
ст. Черемхово	4	6	2	12	190
ст. Зима	3	5	8	9	90
Потребности (b_i)	80	60	170	80	

Перед началом решения необходимо проверить, закрытая или открытая модель задачи. С помощью формулы (4) определим, что запасы равны потребностям, значит, задача является закрытой:

$$\sum a_i = 390$$

$$\sum b_j = 390$$

$$\sum a_i = \sum b_j$$

Для нахождения базового плана применяем метод наименьшей стоимости [3]. Суть решения выбранным методом: из таблицы стоимостей выделяют наименьшую, и в клетку, что ей соответствует помещают меньшее из чисел a_i, или b_j [4].

Затем из рассмотрения исключают либо столбец, который соответствует получателю, потребности которого полностью удовлетворены, либо же строку, что соответствует отправителю, запасы которого полностью будут израсходованы, либо и строку, и столбец, если запасы отправителя и потребности получателя израсходованы и удовлетворены соответственно.

Из части, что осталась в таблице стоимостей снова следует выбирать наименьшую стоимость впредь до того, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Наименьший элемент из исходных данных равен c_{01}=1. Элементы для этого запаса равны 110, а потребности 60. Так как минимальным является 60, то вычитаем его. x_{01} = min(110,60) = 60.

На основании полученных данных заполним таблицу 3.

Табл.3. Первый этап метода

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (Q_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	8	1	9	7	110-60=50
ст. Черемхово	4	x	2	12	190
ст. Зима	3	x	8	9	90
Потребности	80	60-60=0	170	80	

Далее расчёты выполняются по аналогии. Следующий наименьший элемент c_{12}=2. Запасы и потребности для него равны 190 и 170 соответственно. Минимальным является 170, то следует вычитать его. x_{12} = min(190,170) = 170.

Табл.4. Второй этап метода

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (Q_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	8	1	x	7	50
ст. Черемхово	4	x	2	12	190-170=20
ст. Зима	3	x	x	9	90
Потребности	80	0	170-170=0	80	

Далее следует элемент c_{20}=3. Запасы и потребности для него равны 90 и 80 соответственно. Минимальным является 80, то вычитаем его. x_{20} = min(90,80) = 80.

Табл.5. Третий этап метода

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (Q_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	x	1	x	7	50
ст. Черемхово	x	x	2	12	20
ст. Зима	3	x	x	9	90-80=0
Потребности	80-80=0	0	0	80	

Следующий наименьший элемент c_{03}=7. Запасы и потребности для него равны 50 и 80 соответственно. Минимальным является 50, то вычитаем его. x_{03} = min(50,80) = 50.

Табл.6. Четвертый этап метода

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (Q_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	x	1	x	7	50-50=0
ст. Черемхово	x	x	2	12	20
ст. Зима	3	x	x	9	10
Потребности	0	0	0	80-50=30	

Следующий наименьший элемент c_{23}=9. Запасы и потребности для него равны 10 и 30 соответственно. Минимальным является 10, то вычитаем его. x_{23} = min(10,30) = 10.

Табл.7. Пятый этап метода

Станции назначения (B_j) / Станции отправления (Q_i)	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	x	1	x	7	0
ст. Черемхово	x	x	2	12	20
ст. Зима	3	x	x	9	10-10=0
Потребности	0	0	0	30-10=20	

Следующий наименьший элемент c_{13}=12. Запасы и потребности для него равны 20 и 20. Минимальным является 20, то вычитаем его. x_{13} = min(20,20) = 20.

Табл.8. Шестой этап метода

Станции назначения (B_j) / **Станции отправления (Q_i)**	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	x	1	x	7	0
ст. Черемхово	x	x	2	12	20-20=0
ст. Зима	3	x	x	9	0
Потребности	0	0	0	20-20=0	

В результате расчетов получен опорный план (табл.9).

Табл.9. Опорный план

Станции назначения (B_j) / **Станции отправления (Q_i)**	ст. Мальта	ст. Белая	ст. Забитуй	ст. Мегет	**Запасы**
ст. Суховская	0	60	0	50	110
ст. Черемхово	0	0	170	20	190
ст. Зима	80	0	0	10	90
Потребности	80	60	170	80	

Рассчитаем суммарные затраты по полученному плану, вычислив сумму произведений цен и перевозок:

$$Z = 1 \cdot 60 + 7 \cdot 50 + 2 \cdot 170 + 12 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 9 \cdot 10,$$

$$Z = 1320 \ \text{ден. ед.}$$

Решение этой же задачи с помощью среды Mathcad 15.

Представим стоимость перевозок 1 т груза из одного пункта в другой в виде матрицы С, количество имеющегося груза в виде вектор-столбца А, а количество груза, которое необходимо перевезти в виде вектор-столбца В (рис.1):

$$C := \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 110 \\ 190 \\ 90 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 170 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Рис.1. Исходные данные транспортной задачи в среде Mathcad 15

Полученный с помощью метода наименьшей стоимости оптимальный план (табл. 9) запишем в виде матрицы х:

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 170 & 20 \\ 80 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Рис.2. Опорный план

Зададим функцию, определяющую количество груза, доставляемого из пунктов отправления в пункты назначения:

$$F(x) := \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Рис.3. Целевая функция

Далее используем специальный вычислительный блок, используемый для решения систем уравнений. Он открывается служебным словом – директивной GIVEN и имеет следующую структуру: система уравнений, ограниченные условия на область допустимых значений и выражение с функцией Find, Maximize и Minimize. Заметим, что неравенства в рассматриваемом примере в матричном виде, что более экономно и наглядно.

Given

Рис.4. Вычислительный блок

В нашем примере этот блок содержит ограничения, область допустимых значений и выражений с функцией Minimize.

Зададим ограничения для расчета общей стоимости перевозок.

Количество груза, что можно отправить со станций отправления на все пункты назначения, должно соответствовать с имеющимся запасам A_i.

$$x_{0,0} + x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} = A_0$$

$$x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = A_1$$

$$x_{2,0} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = A_2$$

Рис.5. Ограничения по отправлению

Количество груза, привезенного в пункты назначения из всех пунктов отправления, должно совпадать с потребностями B_j.

Рис.6. Ограничения по прибытию

$$x_{0,0} + x_{1,0} + x_{2,0} = B_0$$

$$x_{0,1} + x_{1,1} + x_{2,1} = B_1$$

$$x_{0,2} + x_{1,2} + x_{2,2} = B_2$$

$$x_{0,3} + x_{1,3} + x_{2,3} = B_3$$

Также установим ограничения для нашего искомого оптимально плана.

$$x \geq 0$$

Рис.7. Ограничения оптимального плана

Найдем оптимальный план перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с применением функции Minimize:

$$y := \mathrm{Minimize}(F, x)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Рис.8. Оптимальный план перевозок

Рассчитаем суммарные затраты по полученному плану.

$$F(y) = 1280$$

Рис.9. Окончательная стоимость

Таким образом, ответ к данной задаче: оптимальный план перевозки будет реализован, если со станции Суховская перевезти соответственно 60 т и 50 т угля на станции Белая и Мегет; со ст. Черемхово - 20 т и 170 т на ст. Мальта и Забитуй; со ст. Зима - 60 т и 30 т на ст. Мальта и Мегет. Общие затраты составят 1280 ден. ед.

Реализация подобного решения испытывалась неоднократно на задачах со всевозможными исходными данными, условия которых приближены к реальным, что даёт право применять ее на практике торговыми предприятиями.

Алгоритм реализации ТЗ:

1) На первоначальном этапе создаем таблицу запасов, имеющихся на данном предприятии, и потребностей, запрашиваемых потребителями;
2) Находим полный план поставок (перевозок) и задаем необходимые ограничения;
3) Различными математическими методами или с помощью систем автоматизированного проектирования определяем оптимальный план поставок (перевозок);
4) На основе полученного оптимального плана рассчитываем минимально возможную цену поставки (перевозки).

Заключение

Задачи оптимизации, в том числе транспортная задача, довольно широко используются на практике, что пытались показать авторы данной статьи, взяв в пример железнодорожные перевозки. Решение ТЗ в программной среде Mathcad 15 существенно снижает время на вычисления промежуточных результатов, особенно при большом объеме исходных данных, и дает точный результат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бояркина Г. П. Линейное программирование. Динамическое программирование: Учебное пособие. Иркутск, 2003. – 45 с.
2. Зелова М.И., Косачева Н.А., Черняева Т.Н. Применение линейного программирования в организации железнодорожных перевозок: научная статья / М.И. Зелова, Н.А. Косачева, Т.Н. Черняева – Молодая наука Сибири. – 2021. - №2(12).
3. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования / Е.П. Нестеров. – М.: Транспорт, 1971.–216 с.
4. Таирова, Е. В. Линейное программирование: учеб. пособие для студентов всех специальностей / Е. В. Таирова [и др.]; под общ. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: ИрГУПС, 2007. – 75 с.
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М., 1961. - 494 с.

REFERENCES

1. Boyarkina G. P. Lineynoe programmirovanie. Dinamicheskoe programmirovanie : Uchebnoe posobie. Irkutsk, 2003. pp. 45.
2. Zelova M.I., Kosacheva N.A., Chernyaeva T.N. Primenenie lineynogo programmirovaniya v organizacii zheleznodorozhnyh perevozok : nauchnaya stat'ya / M.I. Zelova, N.A. Kosacheva, T.N. Chernyaeva – Molodaya nauka Sibiri. 2021. No 2(12).
3. Nesterov E.P. Transportnyye zadachi lineynogo programmirovaniya. M., Transport,1971. pp. 216.

4. Tairova, E. V. Linejnoe programmirovanie : ucheb. posobie dlya studentov vsekh special'nostej / E. V. Tairova; pod obshch. red. A. P. Homenko. Irkutsk: IrGUPS, 2007. pp. 75.
5. Yudin D.B., Gol'shtejn E.G. Zadachi i metody lineynogo programmirovaniya: M., 1961. pp. 494.

Информация об авторах

Зелова Мария Игоревна, студентка 3-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: m.zelova@yandex.ru

Елизарьева Алина Артемовна, студентка 3-го курса факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Эксплуатация железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: alinka_e.lizarevs@mail.ru

Елизарьев Илья Алексеевич магистрант 1-го курса, факультета «Управление на транспорте и информационные технологии», специальность «Информационные системы», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: ielizar99@gmail.com

Черняева Татьяна Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей и сообщения, г. Иркутск, e-mail: chetn2021@yandex.ru

Authors

Maria Igorevna Zelova – student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: m.zelova@yandex.ru

Alina Artemovna Elizarieva – student, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: alinka_e.lizarevs@mail.ru

Ilya Alexeyevich Elizariev – undergraduate, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: ielizar99@gmail.com

Tatyana Nikolaevna Chernyaeva – candidate of Physical and Mathematical sciences, associate professor Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: chetn2021@yandex.ru