УДК *519.872.2*

Е. А. Кононов, И. В. Овсянников, О. Д. Толстых

Иркутский государственный университет путей сообщений, г. Иркутск, Российская Федерация

СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ В ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧАХ

Аннотация. *В данной статье рассматриваются системы массового обслуживания с ожиданием в прикладных задачах. Для программной реализации трех систем массового обслуживания (СМО) были рассмотрены прикладные задачи СМО с ограниченной очередью, неограниченной очередью, нетерпеливыми заявками. В статье представлены фрагменты кода программы расчета показателей эффективности, написанной на языке Java в среде разработки IntelliJ IDEA. Программа позволяет рассчитать показатели эффективности работы СМО с ограниченной очередью, неограниченной очередью, нетерпеливыми заявками. Для наглядности работы представлен пользовательский интерфейс программы. Корректность работы программы проверена на контрольных примерах, приведенных в статье.*

Ключевые слова: *система массового обслуживания, простейший поток заявок, программная реализация, интерфейс, язык программирования Java, СМО с ограниченной очередью, неограниченной очередью, с ограниченным временем ожидания, показатели эффективности, программы расчета показателей эффективности.*

E. A. Kononov, I. V. Ovsyannikov, O. D. Tolstykh

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

QUEUING WAITING SYSTEMS IN TRANSPORT PROBLEMS

Abstract. *This article discusses queuing systems with waiting in applied tasks. For the software implementation of three queuing systems (QMS), the applied tasks of QMS with a limited queue, an unlimited queue, and impatient requests were considered. The article presents code fragments of the program for calculating performance indicators written in Java in the IntelliJ IDEA development environment. The program allows you to calculate the performance indicators of queuing systems with a limited queue, unlimited queue, impatient requests. In addition, program has the graphic user interface. The program has tested with examples given in the article.*

Keywords: *queuing system, the simplest flow of applications, software implementation, interface, Java programming language, CFR with limited queue, unlimited queue, with limited waiting time, performance indicators, performance indicator calculation programs.*

Введение

В повседневной жизни постоянно приходится сталкиваться с системами массового обслуживания (СМО), которые в силу своих возможностей не всегда могут полностью удовлетворить спрос или заявку на обслуживание. Вследствие этого возникают очереди, которые оказывают отрицательное влияние на жизнь общества. И тогда возникает задача преобразования СМО, чтобы устранить или, по крайней мере, смягчить последствия этого явления, чтобы система удовлетворяла определенным требованиям. Важный класс систем – Марковские СМО, в которых входящий и выходящий потоки однотипных заявок – простейшие. В этом случае число входящих и выходящих заявок определяется распределением Пуассона, а время обслуживания имеет показательное распределение. Мы ограничимся рассмотрением СМО с ожиданием. Если входящая заявка застает все каналы занятыми, то становится в очередь. В СМО с ограниченной очередью, если заняты все места в очереди, то заявка получает отказ и покидает систему. В СМО с неограниченной очередью заявка может иметь ограничения по времени ожидания (СМО с нетерпеливыми заявками). [1], [2], [3], [4], [5], [6] то есть, подождав некоторое время, может покинуть систему, не дождавшись обслуживания. Стоит отметить, что в СМО с нетерпеливыми заявками стационарный режим обслуживания достигается всегда.

При описании СМО в статье представлены: структура СМО, дисциплина ожидания и характеристики обслуживания и показатели эффективности. Для расчета показателей эффективности работы СМО с ожиданием составлена программа на языке программирования Java. Для проверки корректной работы программы использованы решения прикладных задач для трех видов систем массового обслуживания с ожиданием. Приведен анализ показателей эффективности и выводы об улучшении работы СМО.

СМО с ограниченной очередью

Характеристика СМО: узел обслуживания содержит k каналов; входящий и выходящий потоки заявок простейшие с интенсивностью λ и μ соответственно; m - максимально возможная длина очереди. Входящая заявка становится на обслуживание при наличии свободных каналов и в очередь, если все каналы заняты и есть места в очереди. Если свободных мест в очереди нет, то заявка покидает СМО без обслуживания.

Состояния системы S_n $(n = 0,1,2,...,k+m)$ − определяются числом заявок в системе: S_i $(i = 0,1,...,k)$ − занято i каналов, очереди нет; S_{k+j} $(j = 0,1,...,m)$ − занято k каналов и j заявок в очереди.

СМО с ограниченной очередью описывается размеченным графом состояний («гибели-размножения») (рис. 1).

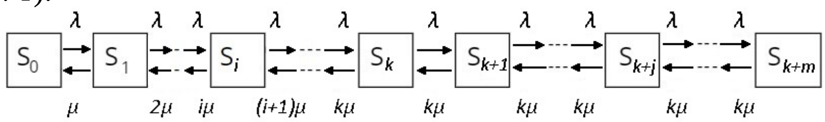


Рис. 1. Граф состояния («гибели-размножения»)

Поясним, например, переход из состояния S_{k+j} в S_{k+j-1}, $j = 1,2,...,m.$ Состояние S_{k+j} означает, что занято k каналов и в очереди j заявок. Переход в состояние S_{k+j-1} означает уменьшение очереди на 1, то есть один из k каналов завершил обслуживание своей заявки и принял на обслуживание первую заявку из очереди. Имеем наложение k простейших потоков каждый с интенсивностью μ, получаем суммарный поток с интенсивностью $k\mu$.

Здесь мы ограничимся нахождением предельного стационарного режима, пользуясь правилом "вероятность состояния S_n равна отношению произведения интенсивностей на верхних стрелках к произведению интенсивностей на нижних стрелках левее состояния S_n, умноженному на P_0". Тогда вероятности состояний:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \; i = \overline{1,k}; \tag{1.1}$$

$$P_{k+j} = \left(\frac{\rho}{k}\right)^j P_k = \chi^j P_k \;\Leftrightarrow\; P_{k+j} = \chi^j \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$

$\chi = \dfrac{\rho}{k}$ − коэффициент использования системы; $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ − показатель загруженности канала.

Так как $\sum_{n=0}^{k+m} P_n = 1,$ то $P_0 \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=1}^{m} \chi^j \right) = 1.$

Приведем показатели эффективности СМО с ограниченной очередью в предельном стационарном режиме.

Вероятность простоя (в системе нет заявок):

$$P_{пр} = P_0 = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{k!} \frac{\chi(1-\chi^m)}{1-\chi} \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}(1-\chi^m)}{k!(k-\rho)} \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Вероятность отказа в обслуживании: $P_{отк} = P_{k+m} = \chi^m \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 = \chi^m P_k$. (1.4)

Относительная пропускная способность	Абсолютная пропускная способность	Среднее число занятых каналов	Средняя длина очереди
$Q = 1 - P_{k+m}$	$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot (1 - P_{k+m})$	$\overline{k} = \dfrac{A}{\mu} = \rho Q$	$\overline{L}_{оч} = \sum_{j=1}^{m} jP_{k+j}$

Средняя длина очереди (среднее число заявок в очереди) определяется, как математическое ожидание: $\overline{L}_{оч} = \sum_{j=1}^{m} jP_{k+j}$. Преобразуем с учетом равенства $\dfrac{\rho^k}{k!} P_0 = P_k$:

$$\overline{L}_{оч} = \chi P_k \frac{1-(m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2} = \frac{\rho}{k} P_k \frac{1-(m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2}. \quad (1.5)$$

Для средней длины системы (число заявок в СМО) справедлива формула Литтла $\overline{L}_{сист} = \overline{k} + \overline{L}_{оч}$.

Если хотя бы один канал свободен и нет очереди, то заявка не ждет обслуживания, а сразу занимает любой из свободных каналов, т.е. вероятность нулевого ожидания:

$$P(T_{ож} = 0) = 1 - P(L_{оч} \geq 0) = 1 - \sum_{j=0}^{m} P_{k+j} = \sum_{i=0}^{k-1} P_i. \quad (1.6)$$

Значения времени ожидания $T_{ож}$ можно найти из следующих соображений: время ожидания заявки, заставшей j заявок в очереди, в среднем равно $\dfrac{j+1}{k\mu}$: $\dfrac{1}{k\mu}$ на каждую заявку, стоящую впереди, и $\dfrac{1}{k\mu}$ до освобождения какого-либо канала. Тогда среднее время ожидания − математическое ожидание времени нахождения в очереди:

$$\overline{T}_{ож} = M(T_{ож}) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j+1}{k\mu} P_{k+j} = \frac{1}{k\mu} P_k \sum_{j=0}^{m-1} (j+1)\chi^j. \quad (1.7)$$

Учитывая время обслуживания одной заявки: $P_{обсл} = 1 - P_{отк} = Q = \dfrac{A}{\lambda}$, $t_{обсл} = \dfrac{1}{\mu}$, получим следующие важные показатели эффективности работы СМО:

Среднее время обслуживания	Среднее время нахождения заявки в СМО	Коэффициент простоя заявки
$\overline{T}_{обсл} = M(t_{обсл}) = t_{обсл} \cdot P_{обсл} = \dfrac{Q}{\mu} = \dfrac{\overline{k}}{\lambda}$	$\overline{T}_{сист} = \overline{T}_{обсл} + \overline{T}_{ож} = \dfrac{Q}{\mu} + \overline{T}_{ож} = \dfrac{\overline{k}}{\lambda} + \dfrac{\overline{L}_{оч}}{\lambda} = \dfrac{\overline{L}_{сист}}{\lambda}$	$K_{пр}^{з} = \dfrac{\overline{L}_{оч}}{m}$

Задача 1. На сортировочной станции имеется две сортировочные горки. Входящий поток поездов является простейшим с интенсивностью $\lambda = 140$ поездов в сутки. Время сортировки одного состава в среднем занимает 12 минут. На сортировочной станции могут находиться максимум $m = 3$ состава. Определить основные показатели работы сортировочной станции.

Решение. По условию: $k = 2$, $\lambda = 140$ поездов в сутки, $t_{обсл} = 12$ минут, $m = 3$.

$\lambda = 140$ поездов в сутки $= \dfrac{140}{24} = 5,833$ поездов в час, $t_{обсл} = 12$ минут $= 0,2$ часа;

$\mu = \dfrac{1}{t_{обсл}} = \dfrac{1}{0,2} = 5$ поездов/час; $\qquad A = 5,833 \cdot 0,963 = 5,617;$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{5,833}{5} = 1,17;$ $\chi = \dfrac{\rho}{k} = \dfrac{1,17}{2} = 0,585;$ $\qquad \bar{k} = 1,17 \cdot 0,963 = 1,127;$

$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{2} \dfrac{1,17^i}{i!} + \dfrac{1,17^3 \left(1 - 0,585^3\right)}{2!\left(2 - 1,17\right)} \right)^{-1} = 0,277;$ $\qquad \bar{T}_{обсл} = \dfrac{1,127}{5,833} = 0,193$ часа $= 11,58$ минут;

$P_{отк} = 0,585^3 \cdot P_2 = 0,585^3 \cdot \dfrac{1,17^2}{2!} \cdot 0,277 = 0,037;$ $\qquad \bar{L}_{оч} = \sum_{j=1}^{3} j \cdot P_{2+j} = 0,35;$ $\quad k_{пр}^3 = \dfrac{0,35}{3} = 0,117;$

$Q = 1 - 0,037 = 0,963 -$ вероятность заявки быть обслуженной $\qquad \bar{T}_{ож} = \dfrac{0,35}{5,833} = 0,060$ часа $= 3,60$ минут;

$\bar{T}_{сист} = 0,193 + 0,060 = 0,253$ часа $= 15,18$ мин.

Вывод: относительная пропускная способность $Q = 0,963$ достаточно высокая. Но для оптимизации работы сортировочной станции при необходимости можно изменить число мест в очереди.

СМО с неограниченной очередью

Если в марковской СМО нет ограничения на длину очереди, то очередь может быть сколь угодно большой $(m \to \infty)$, и система имеет счетное множество состояний S_n $(n = 0,1,2...)$.

Предельные вероятности состояний имеют вид:

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0 = \frac{\rho}{i} P_{i-1}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.1}$$

$$P_{k+j} = \left(\frac{\rho}{k}\right)^j \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \chi^j \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \chi P_k, \;\; j = 0,1,2,\ldots. \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=1}^{\infty} \chi^j \right) = 1.$$

Для этой системы, в отличие от СМО с ограниченной очередью, не всегда существует предельный стационарный режим работы. Действительно, если $\chi = \dfrac{\rho}{k} \geq 1$, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \chi^j$ расходится. Если же $\chi < 1 (\rho < k)$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \chi^j$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и $\sum_{j=1}^{\infty} \chi^j = \dfrac{\chi}{1-\chi} = \dfrac{\rho}{k-\rho}$.

В этом случае:

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\chi}{1-\chi} \right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}}{k!(k-\rho)} \right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{k+1}}{k!(1-\chi)} \right]^{-1}. \qquad (2.3)$$

Замечание. Величина $\chi = \frac{\rho}{k}$ − коэффициент использования СМО − выражает степень насыщения системы. Если $\chi < 1$, то система не перегружена. Действительно, $\chi = \frac{\rho}{k} = \frac{\lambda}{\mu k} = \frac{1}{\mu k} \cdot \lambda < 1$, откуда $\frac{1}{\mu k} < \frac{1}{\lambda}$, т.е. средний временной интервал $\frac{1}{\mu k}$ между последовательными заявками выходящего потока меньше среднего интервала $\frac{1}{\lambda}$ между последовательными заявками входящего потока. Другими словами: система может обслужить заявок больше, чем входит в неё $(\mu k > \lambda)$. Если же $\chi \geq 1$, то каждый канал будет непрерывно занят, система будет перегружена, и очередь при $t \to \infty$ будет расти неограниченно.

Описанная СМО открытого типа является предельным случаем СМО с ограниченной очередью при $m \to \infty$. Стало быть, все показатели эффективности при $\chi < 1$ можно получить как непосредственно, так и предельным переходом при $m \to \infty$ $(\chi^m \to 0, m \to \infty)$ в соответствующих формулах для СМО с ограниченной очередью.

В СМО с неограниченной очередью отказы невозможны: $P_{отк} = 0$.

Относительная пропускная способность	Абсолютная пропускная способность	Среднее число занятых каналов равно коэффициенту загрузки канала
$Q = 1 - P_{отк} = 1$	$A = \lambda \cdot Q = \lambda$	$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

Средняя длина очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\chi}{(1-\chi)^2} \cdot \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \frac{\rho^{k+1} P_0}{k \cdot k!(1-\chi)^2} = \frac{\chi}{(1-\chi)^2} P_k. \qquad (2.4)$$

Среднее число заявок в системе	Среднее число свободных каналов	Коэффициент простоя системы	Среднее время нахождения заявки в СМО
$\bar{L}_{сист} = \bar{k} + \bar{L}_{оч}$	$\bar{\aleph} = k - \bar{k} = k - \rho$	$K_{пр}^{c} = \frac{\bar{\aleph}}{k}$	$\bar{T}_{сист} = \frac{\bar{L}_{сист}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\bar{L}_{оч}}{\lambda}$

В очереди ожидает хотя бы одна заявка с вероятностью

$$P(L_{оч} > 0) = 1 - \sum_{i=0}^{k} P_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{k+j} = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \cdot \frac{\chi}{1-\chi} = \frac{\chi}{1-\chi} P_k. \qquad (2.5)$$

Стало быть, заявка будет ожидать обслуживания с вероятностью

$$P(T_{ож} > 0) = P(L_{сист} \geq k) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{k+j} = \sum_{j=1}^{\infty} \chi^j \cdot \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \frac{P_k}{1-\chi}. \qquad (2.6)$$

Задача 2. На железнодорожном вокзале установлено 6 кассовых аппаратов ($k = 6$). Поток пассажиров, собирающихся купить билет, простейший с интенсивностью $\lambda = 46$ пассажиров в минуту. Время выдачи билета автоматом распределено по показательному закону и равно $\tau = 5,4$ секунд. Определить показатели эффективности работы кассовых аппаратов.

Решение. По условию: $k = 6$, $\lambda = 46$ пассажиров в минуту, $\tau = 5,4$ секунд.

Интенсивность обслуживания аппаратом: $\mu = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{60}{5,4} = 11,11$ пас./мин;

среднее число занятых аппаратов: $\overline{k} = \rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{46}{11,11} = 4,14.$

Коэффициент использования СМО (ж/д касс) $\chi = \dfrac{\rho}{k} = \dfrac{4,14}{6} = 0,69 < 1,$

т.е. существует предельный стационарный режим работы железнодорожной кассы;

Вероятность простоя ж/д кассы – вероятность того, что в кассе нет ни одного пассажира:

$$P_0 = \left[1 + 4,14 + \sum_{i=0}^{6} \frac{4,14^i}{i!} + \frac{4,14^7}{(1-0,69)}\right]^{-1} = 0,0142;$$

Основные показатели эффективности:

$\overline{L}_{оч} = \dfrac{0,69}{0,31^2} \cdot 0,0992 = 0,71$ пассажиров; $\overline{T}_{ож} = \dfrac{0,71}{46} = 0,0155$ минут $= 0,93$ секунд;

$\overline{L}_{сист} = 4,14 + 0,71 = 4,85;$ $\overline{T}_{сист} = \dfrac{4,85}{46} = 0,105$ минут $= 6,33$ секунд;

$k_{пр}^{c} = \dfrac{6 - 4,14}{6} = 0,31$ – коэффициент простоя системы.

Вывод: коэффициент простоя системы равен 0,31, т.е. примерно 31% времени система простаивает без заявок. Для уменьшения этого показателя можно уменьшить количество узлов обслуживания. Действительно, в нашей задачи их 6 и система простаивает одну треть всего времени, необходимо сократить число кассовых аппаратов (каналов обслуживания).

СМО с ограниченным временем ожидания

На практике часто встречаются СМО с неограниченной очередью, где могут быть ограничения по времени ожидания (СМО с нетерпеливыми заявками), то есть, подождав некоторое время, заявка может покинуть систему, не дождавшись обслуживания. Стоит отметить, что в СМО с нетерпеливыми заявками стационарный режим обслуживания достигается всегда.

Рассмотрим k-канальную марковскую СМО с нетерпеливыми заявками. Отметим, что система с неограниченной очередью, но время ожидания заявки в очереди ограничено со средним значением $\overline{T}_{ож}$. Поток уходящих из очереди заявок будем также считать простейшим с интенсивностью $\nu = \dfrac{1}{\overline{T}_{ож}}$. Поток входящих заявок и поток обслуживаний каналом, как и ранее, простейшие с интенсивностью λ, μ соответственно.

Состояния системы S_n $(n = 1, 2, ...)$ означают, что системе n заявок: S_j $(n = 1, 2, ..., k)$ − занято i каналов, очереди нет, S_{k+j} $(j = 1, 2, ...)$ − все каналы заняты и в очереди j заявок.

Граф состояний представлен на рис. 2.

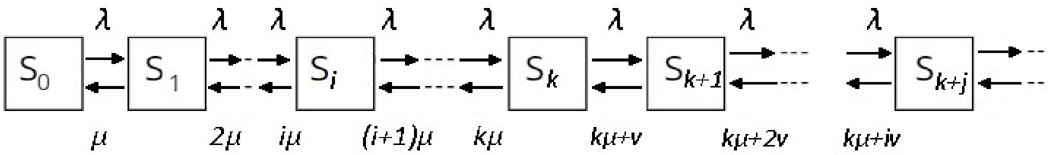


Рис. 2. Граф состояний

Поясним только интенсивности переходов $S_n \to S_{n-1}$ после состояния S_k. Начиная с состояния S_{k+1}, интенсивность перехода представляет сумму интенсивностей потока обслуживания узлом и потока уходов. Действительно, в состоянии S_{k+j} заняты все k каналов и j заявок находится в очереди. Переход из состояния S_{k+j-1} означает, что очередь уменьшилась на 1. Это возможно либо за счёт того, что освободится один из k каналов (интенсивность $k\mu$) и примет очередную заявку, либо за счёт ухода из очереди одной из j заявок (интенсивность jv).

Аналогично рассмотренным выше СМО предельный (стационарный) режим работы определим, пользуясь мнемоническим правилом:

$$P_i = \frac{P^i}{i!}P_0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{3.1}$$

$$P_{k+j} = P_k \frac{\lambda^j}{\prod\limits_{m=1}^{j}(k\mu + mv)} = P_k \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\prod\limits_{m=1}^{j}(k + m\frac{v}{\mu})}, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Используя обозначения $\varphi = \frac{v}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ получаем:

$$P_{k+j} = P_k \frac{\rho^j}{\prod\limits_{m=1}^{j}(k + m\varphi)} = \frac{\rho^{k+j}P_0}{k!(k+\varphi)(k+2\varphi)\ldots(k+j\varphi)}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{3.2}$$

Вероятность простоя системы P_0 находим из условия $\sum\limits_{m=0}^{\infty} P_n = 1$.

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{k}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^j}{\prod\limits_{m=1}^{j}(k+m\varphi)}\right]^{-1} = \left[1 + \rho + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^k}{k!}\left(\frac{\rho}{k+\varphi} + \right.\right. \tag{3.3}$$

$$\left.\left. + \frac{\rho^2}{(k+\varphi)(k+2\varphi)} + \ldots + \frac{\rho^j}{(k+\varphi)(k+2\varphi)\ldots(k+j\varphi)} + \ldots\right)\right]^{-1}.$$

Показатели эффективности работы СМО с нетерпеливыми заявками представлены ниже:

Средняя длина очереди	Среднее числю уходов из очереди	Абсолютная пропускная способность
$\overline{L}_{оч} = \dfrac{\rho - \overline{k}}{\varphi}$	$\overline{L}_{ух} = \overline{L}_{оч} \cdot \nu$	$A = \lambda - \nu \cdot \overline{L}_{оч}$
Относительная пропускная способность	Среднее число занятых каналов	Погрешность вычисления P_0
$Q = \dfrac{A}{\lambda} = 1 - \dfrac{\nu}{\lambda} \cdot \overline{L}_{оч}$	$\overline{k} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda - \nu \cdot \overline{L}_{оч}}{\mu} = \rho - \varphi \cdot \overline{L}_{оч}$	$\sigma_r < \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot \dfrac{\left(\rho/\varphi\right)^r}{r!} e^{\rho/\varphi}$

Среднее число занятых каналов - математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\overline{k} = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \ldots + i \cdot P_i + \ldots + k\,(1 - (P_0 + P_1 + \ldots + \ldots P_{k-1})). \qquad (3.4)$$

Предельным переходом при $\nu \to 0$ $(\varphi \to 0)$ в приведенных формулах при $\rho < k$ получаются соответствующие формулы, характеризующие работу СМО с «терпеливыми» заявками.

Задача 3. На железнодорожном вокзале работают две кассы пригородного сообщения. Поток пассажиров, желающих приобрести билет на электричку, является простейшим с интенсивностью $\lambda = 3$ пас./мин. Время обслуживания пассажиров распределено по показательному закону распределения, среднее время обслуживания составляет $\tau = 30$ секунд. Среднее время ожидания в очереди равно $\overline{T}_{ож} = 15$ секунд. Определить показатели эффективности работы железнодорожных касс.

Решение. По условию: $k = 2$, $\lambda = 3$ пассажиров в минуту, $\tau = 0,5$ минут.

$\mu = \dfrac{1}{0,5} = 2$ пас./мин;

$\nu = \dfrac{60}{15} = 4$ пас./мин;

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 1,5;\quad \varphi = \dfrac{\nu}{\mu} = 2;$

$$P_0 = \left[1 + \frac{2}{3} + \frac{9}{8} + \frac{9}{8}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1,5^j}{\prod_{m=1}^{j}\left(2 + m \cdot 2\right)}\right]^{-1} = 0,2395;$$

Распределение числа занятых кассовых аппаратов:

K_i	0	1	2
P_i	0,2395	0,3592	0,4013

Среднее число занятых кассовых аппаратов:

$$\overline{k} = 0 \cdot 0,2395 + 1 \cdot 0,3592 + 2 \cdot 0,4013 = 1,1618;$$

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\rho - \overline{k}}{\varphi} = \frac{1,5 - 1,1618}{2} = 0,1691;$$

$$\overline{L}_{ух} = \nu \cdot \overline{L}_{оч} = 4 \cdot 0,1691 = 0,6764;$$

$$A = \lambda - \nu \cdot \overline{L}_{оч} = 3 - 4 \cdot 0,1591 = 2,324;$$

$Q = \dfrac{A}{\lambda} = \dfrac{2,324}{3} = 0,775$ — относительная пропускная способность.

Погрешность вычисления P_0 для 6 слагаемых:

$$\sigma_6 \le \frac{\left(3/2\right)^2}{2!} \cdot \frac{\left(3/4\right)^6}{6!} \cdot e^{3/4} \approx 0,0006.$$

Вывод: среднее число пассажиров, ушедших из очереди в единицу времени, равно 0,6764, т.е. из 11 заявок уходят примерно 7, не дождавшись обслуживания. Для уменьшения этого показателя, нам необходимо создать такие условия в системе, чтобы среднее время пребывания в очереди было увеличено, либо создать дополнительные узлы обслуживания.

Программа вычисления показателей эффективности СМО на языке Java

Java — это высокоуровневый язык программирования общего назначения, который основан на методологии объектной ориентированности, он был создан компаний "Sun Microsystems" (ныне "Oracle"). Приложения созданные на языке программирования Java являются кроссплатформенными, это значит, что их можно запустить на любой архитектуре, для которой создана реализация виртуальной машины Java, которая предназначена для трансляции исходного кода программы в байт-код.

В проекте реализации программы был использован фреймворк "Maven" для автоматической сборки проекта, а также для управления зависимостями. Для создания графического интерфейса программы была использована библиотека "JavaFx", созданная разработчиками Java. Библиотека содержит необходимый набор инструментов для создания удобного взаимодействия с пользователем.

Программа способна предоставить численные характеристики систем массового обслуживания, а также нарисовать графы состояний для каждой конкретной системы, вывести распределения вероятностей и др.

Структура программы.

Java Doc – специальный утилита от разработчиков языка для автоматической генерации документации.

Программный код хорошо закомментирован, был создан файл документации с помощью JavaDoc, описывающий структуру программы. Программа состоит из 13 классов, связанные друг с другом отношениями зависимости и наследования (рис. 3).

Classes

Class	Description
DataTableSMO	Элемент в таблице
Main	Главный управляющий класс
MainController	Управляющий класс основного окна
SMO	Абстрактная модель SMO, необходимая для реализации всех остальных
SMOLimitQueue	СМО с ограниченной очередью
SMOLimitQueueCalculator	Окно с решением для СМО с ограниченной очередью
SMOLimitQueueCalculatorController	Управляющий класс для СМО с ограниченной очередью
SMOLimitTime	СМО с ограниченным временем ожидания
SMOLimitTimeCalculator	Окно с вычислениями для СМО с ограниченным временем ожидания
SMOLimitTimeCalculatorController	Управляющий класс окна для СМО с ограниченным временем ожидания
SMOUnLimitTime	СМО с неограниченным временем ожидания
SMOUnLimitTimeCalculator	Окно с вычислениями для СМО с неограниченным временем ожидания
SMOUnLimitTimeCalculatorController	Управляющий класс окна для СМО с неограниченным временем ожидания

Рис. 3. Описание классов из JavaDoc

Была соблюдена концепция инкапсуляции и полиморфизма, поэтому конкретные реализации СМО образованы от абстрактной модели, которая содержит общие черты для всех систем. Каждый конкретный класс модели СМО содержит приватные методы для численного вычисления характеристик для одноканальных и многоканальных систем. Проект реализации программы достаточно громоздкий, поэтому приведем в пример только один класс, который отображает суть структуры всех других видов СМО (рис. 4).

Method Summary

All Methods | Instance Methods | Concrete Methods

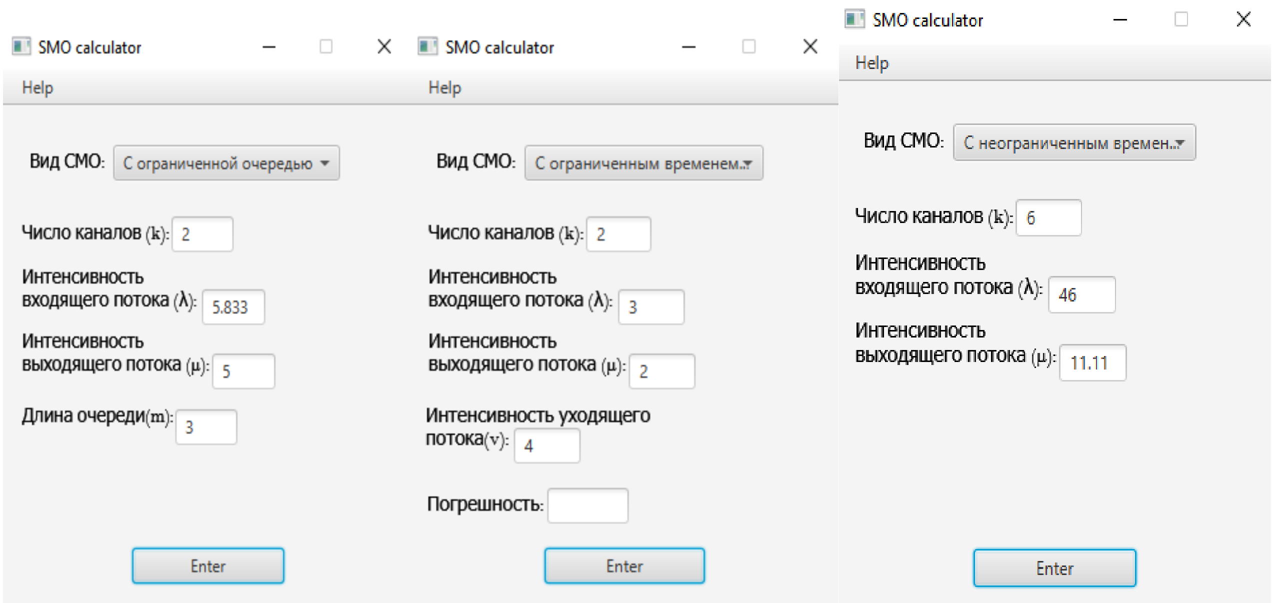
Modifier and Type	Method	Description
double	calculateBusyChannelsAvg()	Среднее число занятых каналов.
double	calculateFreeChannelsAvg()	Среднее число свободных каналов (4.2.12)
double	calculateKLazy()	Коэффициент простоя системы (4.2.13)
double	calculateLineLengthAvg()	Среднее число заявок в очереди (4.2.8)
double	calculateNumSystemAvg()	Среднее число заявок в системе (4.2.10)
double	calculateOneInLine()	Вероятность, того, что в очереди ожидает хотя бы одна заявка (4.2.14)
double	calculateP0()	Вычисление вероятности простоя системы в предельном стационарном режиме.
double	calculateProbability(int i)	Получение вероятностей нахождения системы в i состоянии в предельном стационарном режиме.
double	calculateTimeSystemAvg()	Среднее время пребывания заявки в системе (4.2.11)
double	calculateWaitingProbability()	Вероятность, того, что завяка ожидает обслуживания (4.2.15)
double	calculateWaitTimeLineAvg()	Среднее время пребывания заявки в очереди (4.2.9)
double	getAbs()	Абсолютная пропускная способность (4.2.6)
int	getRel()	Относительная пропускная способность (4.2.5)
double	getXi()	

Рис. 4. Описание методов класса SMOUnLimitTime

Помимо файлов с программным кодом, проект содержит папку resource, содержащая в себе необходимые для отображения графического интерфейса файлы с расширением fxml, изображения, а также файл каскадной таблицы стилей (css) для кастомизации форм. Более подробно ознакомиться с программным кодом проекта, а также внести предложения по улучшению можно в публичном репозитории по ссылке https://github.com/babasuck/SMO_project.

Демонстрация работы программы.

Для демонстрации работы программы представим решения рассмотренных выше задач (рис. 5):



Задача 1. Задача 2. Задача 3.

Рис. 5. Окна с исходными данными

Ниже приведены решения задач с приведением показателей эффективности для трех СМО (рис. 6-8).

Помимо самих вычислений форма с приведенным решением имеет кнопку «Показать формулы», которая позволяет увидеть все использованные в процессе вычислений формулы.

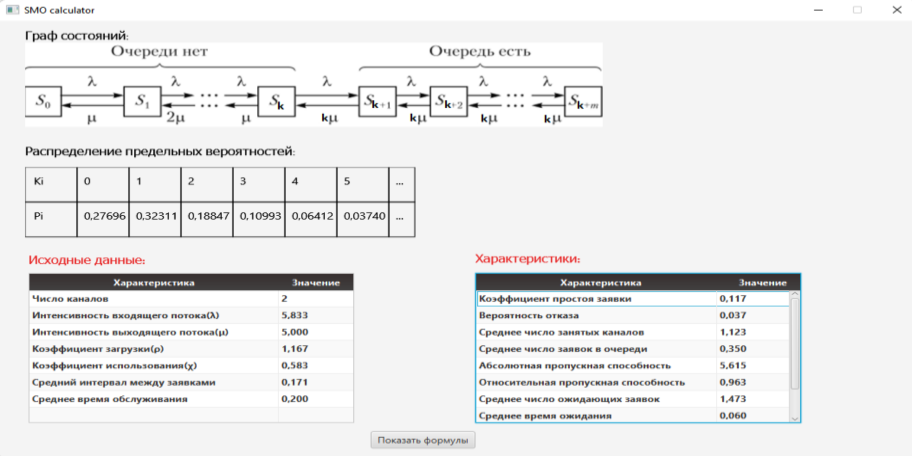


Рис. 6. Расчеты показателей в задаче 1

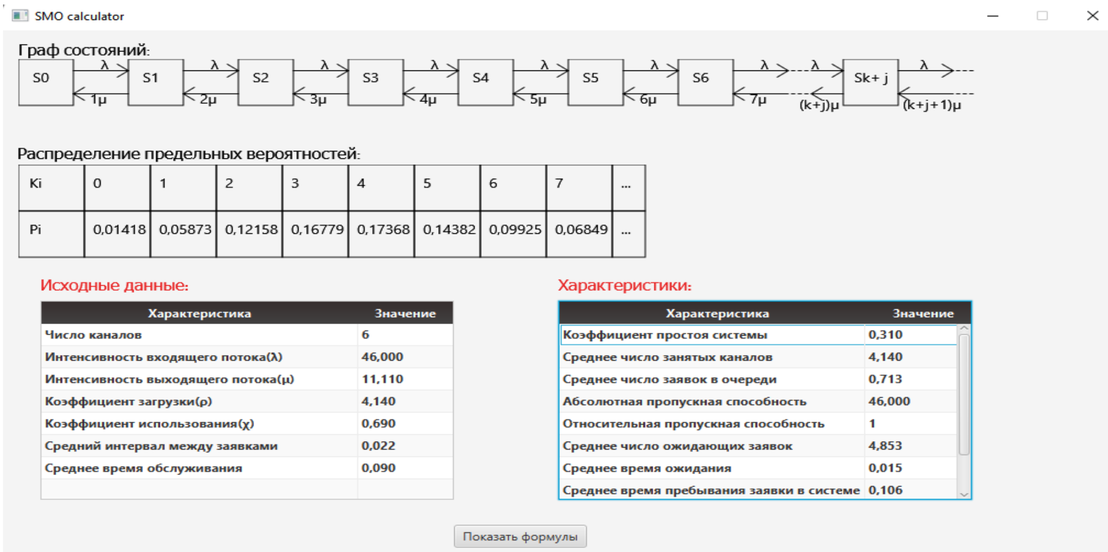


Рис. 7. Расчеты показателей в задаче 2

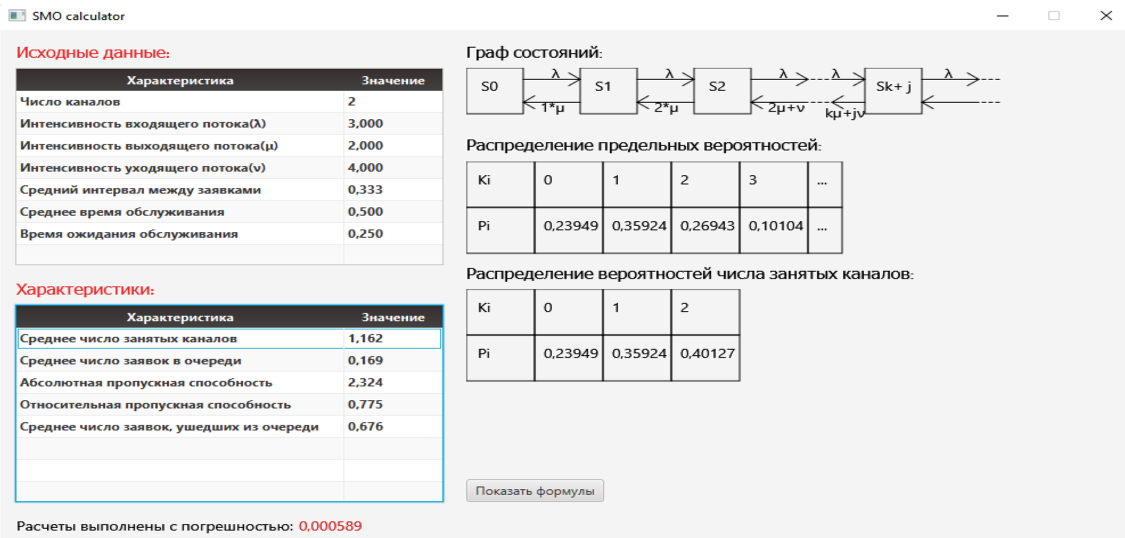


Рис. 8. Расчеты показателей в задаче 3

Заключение

Основные выводы данной статьи:

– описан алгоритм нахождения показателей эффективности для рассмотренных систем массового обслуживания с ожиданием;

– разработана программа на языке программирования Java в среде разработки IntelliJ IDEA, для нахождения показателей эффективности СМО с построением графа;

– корректность работы программы проверена на контрольных примерах, построены графы состояний и сделаны выводы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аниковский В.В., Ерофеева Л.Н. Элементы теории массового обслуживания: Основные понятия, задачи, руководство к решению задач. Методическое пособие / НГТУ Новгород, 2010. 24с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. Учебное пособие - М.: Дрофа, 2004. 203с.

3. Самаров К.Л. Элементы теории массового обслуживания: Элементы теории массового обслуживания. Учебно-методическое пособие К. Л. Самаров, 2009. 19с.

4. Солнышкина, И.В. Теория систем массового обслуживания: учеб. пособие / И. В. Солнышкина. — Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ», 2015. 76с.

5. Толстых О.Д. Цепи Маркова. Системы массового обслуживания. // Учебное пособие для студентов транспортных вузов. − Иркутск: ИрИИТ, 1999. 204с.

6. Толстых О.Д. Специальные разделы высшей математики: практикум / О.Д.Толстых, С.В Миндеева. – Иркутск: ИрГУПС, 2016. 72с.

REFERENCES

1. Anikovsky V.V., Erofeeva L.N. Elements of the theory of queuing: Basic concepts, tasks, guidelines for solving problems. Methodical manual / NSTU Novgorod, 2010. 24c.

2. Wentzel E.S. Operations research: Tasks, principles, methodology. Textbook - M.: Bustard, 2004. 203c.

3. Samarov K.L. Elements of the theory of mass service: Elements of the theory of mass service. Educational and methodical manual K. L. Samarov, 2009. 19c.

4. Solnyshkina, I.V. Theory of queuing systems: textbook. manual / I. V. Solnyshkina. — Komsomolsk-on-Amur: KnAGTU, 2015. 76c.

5. Tolstykh O.D. Markov Chains. Queuing systems. // Textbook for students of transport universities. − Irkutsk: IrIIT, 1999. 204c.

6. Tolstykh O. D., Mindeeva S. V. Special sections of higher mathematics: a textbook. Irkutsk: IrGUPS, 2016. 156 p.

Информация об авторах

Кононов Евгений Александрович – студент 2 курса специальности «Строительство железных дорог», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: zhenya.kononov.11@mail.ru

Овсянников Иван Владимирович – студент 2 курса направления подготовки «Программная инженерия», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: bidanocka@gmail.com

Толстых Ольга Дмитриевна – к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: tolgad05@mail.ru

Information about the authors

Kononov Evgeny Aleksandrovich – 2nd year student "Construction of railways", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: zhenya.kononov.11@mail.ru

Ovsyannikov Ivan Vladimirovich – 2nd year student "Software Engineering", Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: bidanocka@gmail.com

Tolstykh Olga Dmitrievna – Ph.D., Associate Professor of the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, e-mail: tolgad05@mail.ru