УДК *517.91*

Д. С. Иванова, С. В. Миндеева
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗНАНИЙ

Аннотация. *В наши дни, благодаря глобализации, появляются новые знания и исследования, улучшается техника и изобретается новая. Для всего этого необходимы расчеты, в которых преимущественно применяются дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения имеют обширное применение не только в различных разделах математики, но и в смежных науках: в биологии, медицине, механике, экономике, радиационной безопасности и т.д. Учитывая огромный спектр применения обыкновенных дифференциальных уравнений, в настоящей статье мы рассмотрим их применение лишь в некоторых областях знаний.*

Ключевые слова: *биология, медицина, механика, экономика, радиационная безопасность, модель, наука, дифференциальные уравнения.*

D. S. Ivanova, S. V. Mindeeva
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN VARIOUS FIELDS OF KNOWLEDGE

Abstract. *Nowadays, thanks to globalization, new knowledge and research are emerging, technology is improving and new ones are being invented. For all this, calculations are necessary, in which differential equations are mainly used. Differential equations have extensive application not only in various branches of mathematics, but also in related sciences: biology, medicine, mechanics, economics, radiation safety, etc. Given the huge range of applications of ordinary differential equations, in this article we will consider their application only in some areas of knowledge.*

Keywords: *biology, medicine, mechanics, economics, radiation safety, model, science, differential equation.*

Введение

Дифференциальные уравнения имеют значимое место, как в математике, так и в смежных науках. Исследование различных процессов и изучение их закономерностей приводит к построению математических моделей, в основе которых лежат дифференциальные уравнения. Широкий спектр применения дифференциальных уравнений объясняется тем, что многие явления и процессы описываются дифференциальными уравнениями. С их помощью решаются многие задачи математики, экономики, экологии, физики, химии, электротехники, радиационной безопасности и т.д.

Применение дифференциальных уравнений логично там, где исследуются процессы, в описании которых используются такие величины, как скорость и ее изменение. Например, скорость размножения некоторых бактерий; скорость изменения количества опухолевых клеток; скорость изменения информационных потоков и т.д. Составление модели задачи в виде дифференциального уравнения и ее решение позволяет предсказать не только свойства изучаемого явления, но и прогнозировать конечный результат.

Уравнения относительно некоторой функции и ее производных встречаются практически во всех отраслях естествознания: в физике, химии, биологии, радиотехнике, астрономии и т. д. Это могут быть обыкновенные дифференциальные уравнения. Например, второй закон Ньютона $ma = F$ или $m\ddot{x} = F(t, x, \ddot{x})$; уравнение распада радиоактивного вещества $x'(t) = -kx$, где $x = x(t)$.

Основные теоретические сведения, факты теории обыкновенных дифференциальных уравнений можно посмотреть в пособии «Специальные разделы высшей математики» [9], [10].

Применение дифференциальных уравнений в науке

Задача 1. Исследовать рост информационного потока в науке.

Под потоком информации будем понимать количество научных публикаций (обозначим y); тогда скорость изменения информации: $\frac{dy}{dt}$ (пусть t время в годах).

Считается, что скорость изменения информационных потоков пропорционально числу публикаций: $\frac{dy}{dt}=ky,$ где k зависит от количества ссылок, y(t) - количество публикаций в момент времени t.

Тип полученного дифференциального уравнения – с разделяющимися переменными. Для его решения необходимо проделать следующее: во-первых, домножить на dt, во-вторых разделить переменные и в-третьих проинтегрировать. Таким образом, мы получим общее решение данного дифференциального уравнения.

Имеем: $\frac{dy}{dt}=ky\ (\times dt),\ dy=kydt,\ \frac{dy}{y}=kdt,\ \int\frac{dy}{y}=k\int dt,\ \ln y=kt+C,\ y=C_1e^{kt},\ C_1=e^c$.

Таким образом, количество публикаций в момент времени t подчиняется закону: $y=C_1e^{kt}$, которое и является общим решением данного дифференциального уравнения.

Применение дифференциальных уравнений в биологии и медицине

Многими учеными-исследователями, педагогами рассматривается применение дифференциальных уравнений в биологии и медицине. Рассмотрим задачу растворения лекарственных форм вещества из таблеток [7].

Задача 2. Пусть $n-$ количество вещества в таблетке, которое осталось до времени растворения t.

Тогда $\frac{dn}{dt}=-kn,$ где k – постоянная скорость растворения. В данном уравнении знак «–» означает то, что с течением времени количество лекарственных форм вещества убывает.

Решение подобного дифференциального уравнения более подробно мы рассмотрели в задаче 1. Рассмотрим лишь вывод данной задачи. Общим решением является: $n=C_1e^{-kt}$.

Полагая: $t=0, n=n_0$ получим: $n(0)=C_1e^{-k\cdot 0}=C_1=n_0$. Имеем: $n=n_0e^{-kt}$.

Из полученного уравнения выразим k. Для этого разделим на n_0 и прологарифмируем обе части, воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$\frac{n}{n_0}=e^{-kt},\ \ln(\frac{n}{n_0})=\ln(e^{-kt}),\ \ln(\frac{n}{n_0})=-kt.$$

Постоянная скорость распространения k:

$$k=-\frac{\ln(\frac{n}{n_0})}{t}.$$

Авторы также рассматривают модель «хищник-жертва», которая используется в медицине при моделировании онкологических заболеваний опухолевых клеток, которые выступают в роли жертвы, а лимфоциты в роли хищника. Данная модель помогает медикам определить путь лечения. Данная зависимость выливается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая носит название модель Лотки-Вольтера: $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=a_1x-b_1xy\\ \frac{dy}{dt}=-a_2x+b_2xy\end{cases}$, где a_1, a_2, b_1, b_2- числовые коэффициенты [8].

Применение дифференциальных уравнений в экономике

Самым показательным приложением дифференциальных уравнений в экономике является модель Эванса.

Задача 3. При организации продажи нового товара торговым предприятиям зачастую приходиться прибегать к услугам рекламы. Для того чтобы последняя была успешной и современной, необходимо знать закон распространения информации о новом товаре среди ее потенциальных покупателей. Найдем вид указанной закономерности при следующих предположениях относительно рассматриваемого процесса.

Пусть N – общее число потенциальных покупателей нового товара, $x(t)$ - число потенциальных покупателей, знающих к моменту времени t о поступлении в продажу нового товара, $[N - x(t)]$ - число покупателей еще не имеющих информации о товаре.

Предположим, что информация о товаре распространяется сред покупателей по средству их общения между собой. Вероятность того, что при встречи покупатель, знающи о товаре, встретиться с покупателем, еще не имеющем информации о товаре, равна $\frac{(N-x)}{N}$.

Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \frac{px(N-x)}{N} \text{ или } \mathrm{x}' = \frac{\mathrm{px}(\mathrm{N}\text{-}\mathrm{x})}{N}.$$

Решая полученное уравнение, найдем вид зависимости величины x от t: $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{N}}{1 + \frac{1}{\mathrm{A}} e^{-pt'}}$,

где параметр A подбирается из условия $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ в момент $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$.

В модели Эванса предполагается, что «цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением», то есть $\Delta\mathrm{p} = \mathrm{y}(\mathrm{d} - \mathrm{s})\Delta\mathrm{t}$. Здесь p – цена, d – спрос, а s – предложение. То есть изменение цены за какой-то промежуток времени пропорционально разности спроса и предложения. Спрос и предложения являются функциями цены. $d = a - bp, s = \alpha + \beta p$. С учетом это уравнение и его решение записывается так:

$$\frac{dp}{dt} = y(a-\alpha) - y(b+\beta)\,p, \quad p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} - Ce^{-y(b+\beta)t},$$

где C – произвольная постоянная.

Это уравнение фактически описывает процесс линейной релаксации или затухания цены.

Применение дифференциальных уравнений в радиационной безопасности

Всевозрастающая роль атомной энергетики в товливно-энергетическом комплексе Росси, необходимость создании эффективной системы обеспечения радиационной безопасности населения и окружающей среды, необходимость подготовки квалифицированных кадров – все эти причины стали предпосылками для изучения дисциплины «Радиационная безопасность», что повлекло за собой разработку учебно-методического сопровождения. В частности, разработку программ, написание учебных пособий, методических указаний. Учитывая цель нашей статьи мы не оставили без внимания учебное пособие «Радиационная безопасность» [1], курс лекций «Радиационная защита» [2]. Рассмотрим задачу, которая наглядно показывает применение дифференциальных уравнений в радиационной безопасности.

Задача 4. Определите удельные ионизационные потери и среднее число ионов на 1 см пробега в воздухе для α – частица с энергией 10 МэВ, если на образование одного иона в воздухе необходимо ≈ 35 МэВ.

Для воздуха: Z = 7, A = 14, плотность $p = 1{,}29 \cdot 10^{-3} \frac{Г}{см^3}$. Масса α - частицы M = 3727 МэВ. Отношение кинетической энергии частицы к энергии потока Mc^2 обозначим как $\alpha = \frac{10 МэВ}{3727 МэВ} = 0{,}0027$, тогда по формуле $\beta^2 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$: $\beta^2 = 7{,}2 \cdot 10^{-6}$, а удельные ионизационные потери согласно формуле $-\frac{dE}{dx} = 3{,}1 \cdot 10^5 \cdot \frac{Z \cdot z^2 p}{A\beta^2}\left(11{,}2 + \ln\frac{\beta^2}{z(1-\beta^2)}\beta^2\right)\frac{эВ}{см}$ равны:

$$-\left(\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dx}}\right)=3{,}1\cdot10^{5}\cdot\frac{7{,}2^{2}\cdot1{,}29\cdot10^{-3}}{14\cdot0{,}0053}\left(11{,}2+\ln\frac{0{,}0053}{(1-0{,}0053)}-0{,}0053\right)=6{,}1\cdot10^{5}\,\frac{эВ}{см}=0{,}61\frac{МэВ}{см}.$$

Среднее число ионов, образующихся на 1 см пробега альфа-частицы, находятся по формуле $\mathrm{R}\approx\frac{1}{(\mathrm{NZ})}$

Удельные ионизационные потери составят: $\mathrm{N}=\frac{\left(\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dx}}\right)\alpha}{35}=1{,}74\cdot10^{4}\,\frac{ионов}{см}.$

Можно приводить множество примеров применения дифференциальных уравнений в различных областях знаний. Имеется опыт применений дифференциальных уравнений в аграрном вузе С.П.Голышевой [3]; опыт применений дифференциальных уравнений в техническом вузе Т.Н.Черняева [4], [5], [6] и т.д.

Заключение

При изучении дифференциальных уравнений наглядно показывается их применение в различных областях науки. При изучении смежных дисциплин повышается мотивация и к изучению математического анализа и более углубленному усвоению основных методов, понятий и способов их решения.

Исходя из всего вышеперечисленного, мы видим, что дифференциальные уравнения играют немаловажную роль в различных науках и обеспечения бесперебойных функционирований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асламова, В.С., Руш, Е.А., Симоненко, Д.Е. Радиационная безопасность : учеб. пособие. Иркутск: ИрГУПС, 2015. – 164 с.

2. Беспалов, В.И. Лекции по радиационной защите: учебное пособие / Томский политехнический университет. – 5-е изд, расшир. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2017. – 694 с.

3. Голышева, С.П. Роль приложений дифференциальных уравнений в обучении математике в аграрном вузе / Байкалский Вестник ДААД. 2019. – №1. – С.134-138.

4. Миндеева С.В., Черняева Т.Н. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений для решения экономических задач / Наука и практика: интеграция знаний: материалы международной научно-практической конференции, НОУ ВО «Московский экономический институт». 2015. – С.157-159.

5. Миндеева С.В., Черняева Т.Н. Возможности решения задачи Дирихле для некоторых классов систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // В мире научных открытий. Сер.: Естественные и технические науки, 2014. – №12.2(60). – С.568-571.

6. Овчинникова, Н.И. Применение дифференциальных уравнений к решению технических задач / В сборнике: Механизация сельскохозяйственного производства в условиях Восточной Сибири. Материалы научно-практической конференции. Иркутская государственная сельскохозяйственная академия. 2055. – С.39-40.

7. Подгорная, В.В. Кибалко, П.И. Курусь, С.С. Станчук, К.А. Практическое применение дифференциальных уравнений в медицине // Правовые и социально- экономические аспекты становления Республики Беларусь : материалы 3-й Внутривузовской студенческой научно-практической конференции, г. Минск, 18 апреля 2019 г. / [редакционная коллегия: В. В. Лосев (главный редактор) и др.]. — Минск : МИТСО, 2019. — С. 421—426.

8. Рубецков, Д.И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней/ Д.И. Рубецкой // Известие Вузов. Прикладная линейная динамика. – 2011. - №2. – С. 69-87.

9. Толстых О.Д. Специальные разделы высшей математики: учеб. пособие / О.Д.Толстых, С.В Миндеева. – Иркутск: ИрГУПС, 2016. 156 с.

10. Толстых О.Д. Специальные разделы высшей математики: практикум / О.Д.Толстых, С.В Миндеева. – Иркутск: ИрГУПС, 2016. 72 с.

REFERENCES

1. Aslamova, V.S., Rush, E.A., Simonenko, D.E. Radiation safety : textbook. stipend. Irkutsk: IrGUPS, 2015. – 164 p.

2. Bespalov, V.I. Lectures on radiation protection: a textbook / Tomsk Polytechnic University. – 5th ed., expanded. Tomsk: Publishing House of Tomsk Polytechnic University, 2017. – 694 p.

3. Golysheva, S.P. The role of applications of differential equations in teaching mathematics at an agrarian university / Baikal Bulletin of DAAD. 2019. – No. 1. – pp.134-138.

4. Mindeeva S.V., Chernyaeva T.N. Applications of ordinary differential equations for solving economic problems / Science and practice: integration of knowledge: materials of the International scientific and practical conference, the Moscow Economic Institute. 2015. – p.157-159.

5. Mindeeva S.V., Chernyaeva T.N. Possibilities of solving the Dirichlet problem for some classes of systems of partial differential equations of the second order // In the world of scientific discoveries. Ser.: Natural and Technical Sciences, 2014. – №12.2(60). – p.568-571.

6. Ovchinnikova, N.I. Application of differential equations to solving technical problems / In the collection: Mechanization of agricultural production in Eastern Siberia. Materials of the scientific and practical conference. Irkutsk State Agricultural Academy. 2055. – p.39-40.

7. Podgornaya, V.V. Kibalko, P.I. Kurus, S.S. Stanchuk, K.A. Practical application of differential equations in medicine // Legal and socio-economic aspects of the formation of the Republic of Belarus : materials of the 3rd Intramural Student Scientific and Practical Conference, Minsk, April 18, 2019 / [editorial Board: V. V. Losev (editor—in—chief), etc.]. - Minsk: MITSO, 2019. - p. 421-426.

8. Rubetskov, D.I. The phenomenon of the mathematical model of Lotka-Volterra and similar ones/ D.I. Rubetskoy // Izvestiya Vuzov. Applied linear dynamics. - 2011. - No. 2. – p. 69-87.

9. Tolstykh O.D. Special sections of higher mathematics: textbook. manual / Irkutsk: IrGUPS, 2016. 156 p.

10. Tolstykh O.D. Special sections of higher mathematics: practicum / Irkutsk: IrGUPS, 2016. 72 p.

Информация об авторах

Иванова Дарья Сергеевна – студентка 1-го курса факультета «Строительство железных дорог», направление подготовки «Техносферная безопасность», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: *ivanova_ds01@mail.ru*

Миндеева Светлана Вильсуровна – старший преподаватель кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей и сообщения, г. Иркутск, e-mail: *pasha15032007@yandex.ru*

Information about the authors

Ivanova Darya Sergeevna – 1st year student of the Faculty of «Railway Construction», the direction of training «Technosphere safety», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: *ivanova_ds01@mail.ru*

Mindeeva Svetlana Vilsurovna – senior lecturer of the Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: *pasha15032007@yandex.ru*