

Эффект «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы и его аналоги

А.И. Артюнин¹✉, О.Ю. Суменков²

¹Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

²Научно-технологический университет «Сириус», г. Сочи, Российская Федерация

✉artyunin_ai@irgups.ru

Резюме

В статье описывается новое явление в механике – эффект «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы. Суть его заключается в том, что для маятника, установленного на валу двигателя механической системы с возможностью свободного вращения, в зависимости от момента инерции и трения в его опоре вероятен такой режим движения, когда вал вращается с заданной угловой скоростью, а частота вращения маятника равна одной из собственных частот колебаний механической системы. При моделировании данного процесса с использованием операции осреднения получено в первом приближении уравнение движения маятника, которое наглядно показывает, что его угловая скорость на вращающемся валу механической системы зависит не только от момента инерции и трения в его опоре, а также от собственной частоты колебаний и демпфирования механической системы. Кроме того, в работе рассматриваются явления, которые в некоторой степени можно считать аналогами эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы: колебания механических систем с ограниченной мощностью двигателя; эффект Зоммерфельда; несинхронное движение исполнительных элементов в виде шариков (роликов) в шаровом автобалансиру вертикального ротора. В первых двух случаях эффекта «застревания» маятника аналогии больше носят математический, чем физический характер. Более близким к эффекту «застревания» маятника является несинхронное движение шариков (роликов) в шаровом автобалансиру вертикального ротора.

Ключевые слова

маятник, автобалансиру, эффект «застревания», угловая скорость, собственная частота колебаний, ограниченное возбуждение, эффект Зоммерфельда, несинхронное движение

Для цитирования

Артюнин А.И. Эффект «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы и его аналоги / А.И. Артюнин, О.Ю. Суменков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2023. № 3(79). С. 10–21. DOI 10.26731/1813-9108.2023.3(79).10-21.

Информация о статье

поступила в редакцию: 04.09.2023 г.; поступила после рецензирования: 14.09.2023 г.; принята к публикации: 15.09.2023 г.

The effect of the «jamming» of the pendulum on the rotating shaft of the mechanical system and its analogues

A.I. Artyunin¹✉, O.Yu. Sumenkov²

¹Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

²Sirius University of Science and Technology, Sochi, the Russian Federation

✉artyunin_ai@irgups.ru

Abstract

The article describes a new phenomenon in mechanics – the effect of «jamming» of a pendulum on a rotating shaft of a mechanical system. The essence of this phenomenon lies in the fact that for a pendulum mounted on the motor shaft of a mechanical system with the possibility of free rotation, depending on the moment of inertia of the pendulum and friction in its support, such a mode of motion is possible when the shaft rotates at a given angular velocity, and the frequency of rotation of the pendulum is equal to one of the natural oscillation frequencies of the mechanical system. When modeling this phenomenon using the averaging operation, the equation of the pendulum motion is obtained in the first approximation, which clearly shows that the angular velocity of the pendulum on the rotating shaft of the mechanical system depends not only on the moment of inertia of the pendulum and friction in its support, but also on the natural frequency of oscillations and damping of the mechanical system. Besides, the article also considers phenomena that to a certain extent can be regarded as analogs of the «jamming» effect of a pendulum on a rotating shaft of a mechanical system, which include: vibrations of mechanical systems with limited engine power; the Sommerfeld effect; non-synchronous movement of actuating elements in the form of balls (rollers) in the ball auto-balancer of a vertical rotor. With the first two phenomena of the «jamming» pendulum effect, the analogies are more mathematical than physical in nature. The non-synchronous movement of the balls (rollers) in the ball auto-balancer of the vertical rotor is closer to the effect of the pendulum «jamming».

Keywords

pendulum, auto-balancer, «jamming» effect, angular velocity, natural oscillation frequency, limited excitation, Sommerfeld effect, non-synchronous motion

For citation

Artyunin A.I., Sumenkov O.Yu. Effekt «zastrevaniya» маятника на vrashchayushchemsya valu mekhanicheskoi sistemy i ego analogi [The effect of the «jamming» of the pendulum on the rotating shaft of the mechanical system and its analogues]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2023, no. 3(79), pp. 10–21. DOI: 10.26731/1813-9108.2023.3(79).10-21.

Article info

Received: September 4, 2023; Revised: September 14, 2023; Accepted: September 15, 2023.

Введение

Новое явление в механике – эффект «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы – было открыто профессором А.И. Артюниным в 1992 г. при изучении способов автоматической балансировки жесткого ротора на упругих опорах с помощью четырех маятников, установленных на валу ротора с возможностью свободного вращения. [1, 2]. Маятники устанавливались попарно по обоим сторонам ротора как бы имитируя плоскости коррекции при балансировке роторов. При разгоне до рабочей частоты вращения ротор проходил через две критические скорости. На первой критической скорости ротор в основном совершал линейные колебания, а на второй – угловые. В результате экспериментов было установлено, что при определенном соотношении между моментом инерции маятников и трением в их опорах возможен такой режим движения, при котором ротор вращается со своей рабочей частотой вращения (угловой скоростью), а частота вра-

щения маятников совпадает с одной из критических скоростей ротора. Интересно, что когда маятники вращались с угловой скоростью, равной первой критической скорости, то все четыре маятника были направлены в одну сторону, а когда они вращались со скоростью, равной второй критической скорости, на которой в основном преобладают угловые колебания ротора, то маятники в разных парах были направлены противоположно друг другу. И в том, и в другом случае резко возрастает вибрация, колебания ротора носят характер незатухающих двухчастотных биений (рис. 1).

Достоверность экспериментальных данных подтверждена результатами компьютерного моделирования, суть которого заключалась в численном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих движение модели ротора с маятниковым автобалансиром [3, 4].

Описанное явление получило название «эффект “застревания” маятника на вращающемся валу механической системы».

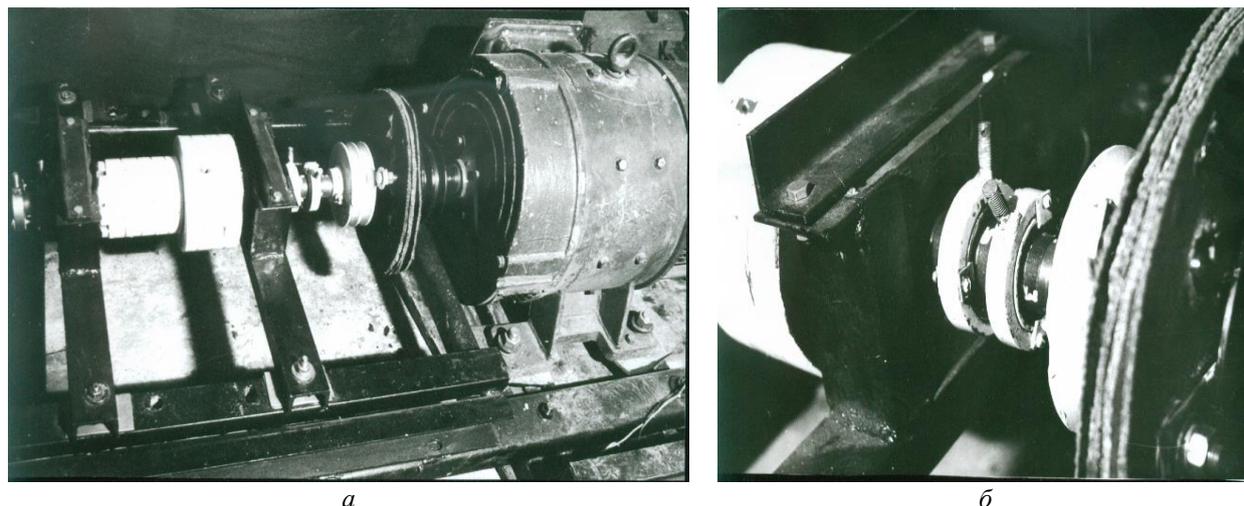


Рис. 1. Экспериментальная установка по определению эффекта «застревания»:

a – общий вид лабораторного стенда; *б* – маятники

Fig. 1. Experimental setup for determining the «jamming» effect:

a – general view of the laboratory stand; *b* – pendulums

Похожее явление было обнаружено учеными из Университета Отто фон Герике в Магдебурге в 1999–2004 гг [5–7] при изучении автобалансирующего процесса с помощью шарового балансира. Там проводились исследования процесса автоматической балансировки жесткого статически неуравновешенного ротора на изотропных упругих опорах. Основной деталью автобалансира была цилиндрическая камера, заполненная вязкой жидкостью, с исполнительными элементами в виде шариков (роликов) на кольцевых дорожках. Установлено, что в процессе запуска ротора до рабочей скорости при его прохождении через критическую скорость в некоторых случаях шарики (ролики) не могли разогнаться до рабочей скорости ротора, а совершали несинхронное движение, циркулируя в камере со скоростью, равной критической скорости ротора. Авторы считают, что это явление похоже, но не идентично известному эффекту Зоммерфельда в несбалансированном роторе с ограниченным приводным моментом. Более подробно об исследовании будет сказано далее.

Цель настоящей статьи – сравнение эффекта «застывания» маятника на валу механической системы с явлениями, возникающими при колебаниях механических систем с двигателем ограниченной мощности, с эффектом Зоммерфельда, а также с явлением несинхронного движения шаров в автобалансире.

Моделирование эффекта «застывания» маятника на вращающемся валу

Для изучения условий возникновения и существования эффекта «застывания» маятника на валу механической системы рассмотрим простую механическую модель (рис. 2).

После процедуры составления дифференциальных уравнений движения модели, используя уравнения Лагранжа второго рода, получим систему из трех дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение выбранной механической модели:

$$\begin{aligned} M^* \ddot{x}_1 + b_x \dot{x}_1 + c_x x_1 &= ml \cdot (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi); \\ M^* \ddot{y}_1 + b_y \dot{y}_1 + c_y y_1 &= -ml \cdot (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi); \end{aligned} \quad (1)$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} + ml^2 \ddot{x}_1 \cos \varphi + ml^2 \ddot{y}_1 \sin \varphi = f(\omega - \dot{\varphi}) - mgl \cos \varphi,$$

где $M^* = M + m$, при этом M – масса корпуса; m , l – масса и длина маятника; c_x , c_y – жесткость опор в горизонтальном и вертикальном направлениях; b_x , b_y – коэффициенты вязкого трения в

горизонтальном и вертикальном направлениях; x_1 , y_1 – обобщенные координаты корпуса; φ – угол поворота маятника; ω – угловая скорость ротора; f – коэффициент сопротивления относительному движению маятника на вращающемся валу.

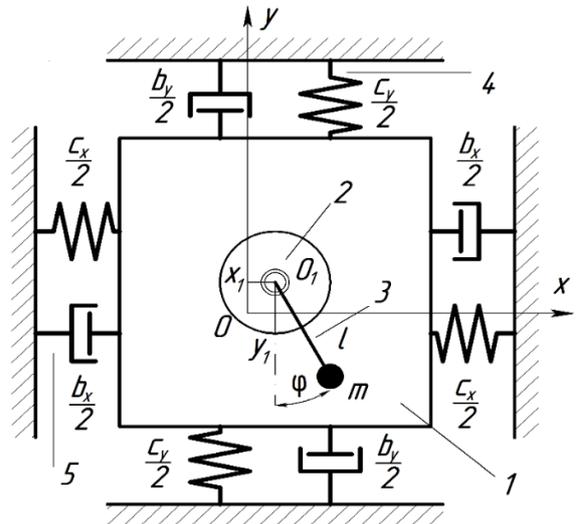


Рис. 2. Механическая система с маятником, вращающимся на валу двигателя в корпусе:

1 – корпус (точка O_1 – центр масс корпуса и ротора); 2 – ротор; 3 – маятник; 4 – невесомые упругие опоры корпуса; 5 – демпферы корпуса

Fig. 2. Mechanical system with a pendulum rotating on the motor shaft in the casing:

1 – casing (point O_1 – the center of mass of the casing and rotor); 2 – rotor; 3 – pendulum; 4 – weightless elastic supports of the housing; 5 – dampers of the casing

Введем обозначения: $h = ml / M^*$; $2n_x = b_x / M^*$; $2n_y = b_y / M^*$; $k_1^2 = c_x / M^*$; $k_2^2 = c_y / M^*$ и запишем систему уравнений (1) в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2n_x \dot{x}_1 + k_1^2 x_1 &= h \cdot (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi); \\ \ddot{y}_1 + 2n_y \dot{y}_1 + k_2^2 y_1 &= -h \cdot (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi); \end{aligned} \quad (2)$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} + f(\omega - \dot{\varphi}) = -ml(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{y}_1 \sin \varphi + g \cos \varphi).$$

Для получения уравнения маятника используем вполне адекватные допущения, а именно:

– во-первых, будем считать, что величина углового ускорения маятника намного меньше квадрата его угловой скорости, т.е. $\ddot{\varphi} \ll \dot{\varphi}^2$;

– во-вторых, при выводе уравнения движения маятника в правой части уравнения будем пренебрегать «быстрыми» составляющими движения, применяя операцию усреднения.

Запишем два первых уравнения системы (2):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2n_1 \dot{x}_1 + k_1^2 x_1 &= h \cdot (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi); \\ \ddot{y}_1 + 2n_2 \dot{y}_1 + k_2^2 y_1 &= -h \cdot (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\ddot{\varphi} \ll \dot{\varphi}^2$, то будем пренебрегать членами с $\ddot{\varphi}$ в уравнениях и в выражениях частного решения. Уравнения (3) в нашем случае являются порождающими уравнения. Частные решения этих уравнений будем искать в виде $x = a_1 \cdot \cos \varphi + b_1 \cdot \sin \varphi$; $y = a_2 \cdot \sin \varphi + b_2 \cdot \cos \varphi$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + b_1 \dot{\varphi} \cos \varphi; \quad \dot{y} = -a_2 \dot{\varphi} \sin \varphi + b_2 \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \ddot{x} &= -a_1 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - b_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \quad \ddot{y} = -a_2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - b_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3) получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{h \dot{\varphi}^2 2n_y \dot{\varphi}}{(k_2^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2}; \quad b_1 = \frac{h \dot{\varphi}^2 (k_1^2 - \dot{\varphi}^2)}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2}; \\ a_2 &= -\frac{h \dot{\varphi}^2 (k_2^2 - \dot{\varphi}^2)}{(k_2^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2}; \quad b_2 = -\frac{h \dot{\varphi}^2 2n_x \dot{\varphi}}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2}. \end{aligned}$$

Подставляя далее решения порождающего уравнения в третье уравнение системы (2) и усредняя правую часть полученного уравнения, получим следующее уравнение для описания движения маятника:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} + f(\dot{\varphi} - \omega) &= -\frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} - \\ & - \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда видно, что угловая скорость маятника, помимо массы и длины маятника, трения в его опоре, зависит также от собственных частот колебаний и демпфирования механической системы.

Численно решая это дифференциальное уравнение, получим закон изменения угловой скорости маятника. Вычисления проводились при следующих исходных данных: $M = 8$ кг; $m = 0,02$ кг; $l = 0,05$ м; $b_x = 5$ Н·с/м; $b_y = 50$ Н·с/м; $f = 10^{-4}$ Н·м/рад; $c_x = 2 \cdot 10^4$ Н/м; $c_y = 8 \cdot 10^4$ Н/м. Закон разгона ротора зададим в виде: $\omega = 30t$ при $0 \leq t \leq 10$ с и $\omega = 157$ рад/с при $t > 10$ с. При этих данных модель имеет две собственные частоты колебаний: $k_1 = 50$ рад/с; $k_2 = 100$ рад/с. Результаты численного интегрирования уравнения (4) при изменении только массы маятника приведен на рис. 3.

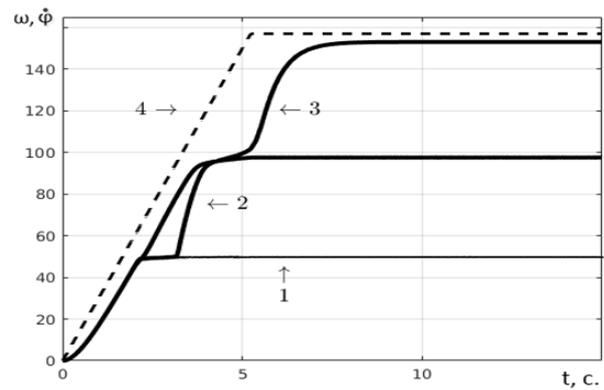


Рис. 3. Законы разгона маятника (кривые 1–3) и ротора (4) при изменении массы маятника
Fig. 3. The laws of acceleration of the pendulum (curves 1–3) and the rotor (4) when the mass of the pendulum changes

Как видно из рис. 3, при изменении массы маятника его угловая скорость «застревает» и на первой, и на второй собственной частоте (кривые 1 и 2 соответственно), и вращается со скоростью ротора (кривая 3).

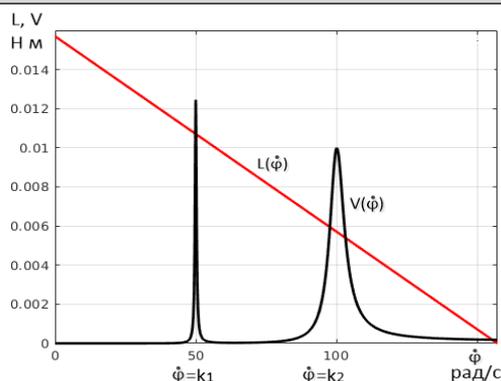
Хотя уравнение (4) описывает в первом приближении нестационарный режим движения маятника с учетом угловой скорости ротора ω , рассмотрим случай, когда $\omega = \text{const}$, а угловой скорости маятника φ будем придавать постоянные значения от 0 до 200 рад/с, при этом считая $\ddot{\varphi} = 0$. Тогда из уравнения (4) получим:

$$\begin{aligned} f(\dot{\varphi} - \omega) + \frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} + \\ + \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решим это уравнение графически, как это сделано в работах [8, 9]. Введем обозначения и примем условно, что $L(\dot{\varphi}) = f(\dot{\varphi} - \omega)$ является «движущим моментом», а выражение $V(\dot{\varphi})$ является «вибрационным моментом»:

$$\begin{aligned} V(\dot{\varphi}) &= \frac{mlhn_x \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_x^2 \dot{\varphi}^2} + \\ & + \frac{mlhn_y \dot{\varphi}^5}{(k_1^2 - \dot{\varphi}^2)^2 + 4n_y^2 \dot{\varphi}^2} = 0. \end{aligned}$$

Результаты графического решения уравнения (5) представлены на рис. 4.

Рис. 4. Графики $L(\dot{\varphi})$ и $V(\dot{\varphi})$ Fig. 4. Graphics $L(\dot{\varphi})$ and $V(\dot{\varphi})$

Это графическое представление движущего момента и вибрационного момента показывает, что эффект «застревания» будет иметь место, когда их графики пересекутся. В нашем случае маятник «застревает» при $\dot{\varphi} = 50$ рад/с и при $\dot{\varphi} = 100$ рад/с, т. е. при угловых скоростях, равных собственным частотам колебаний механической системы. Этот результат совпадает с результатами численного интегрирования уравнения (4) (см. рис. 3).

Колебательные системы с ограниченным возбуждением

К аналогам эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу можно отнести колебательные системы с ограниченной мощностью двигателя. Исследования о взаимодействии колебательных систем с двигателем ограниченной мощности, когда движение сопровождается взаимным воздействием друг на друга источника энергии и колебательной системы, представляют собой особый раздел теории колебаний. В настоящее время на основании результатов экспериментов и привлечения современных методов анализа колебательных процессов построена теория взаимодействия колебательных систем различного рода (линейных, нелинейных, параметрических, автоколебательных) с источниками энергии различной физической природы (электромеханический, электромагнитный, гидравлический, пневматический, двигатель внутреннего сгорания и др.). основополагающие работы теории систем с ограниченным возбуждением принадлежат В.О. Кононенко [8, 10–12]. Большой вклад в развитие этого научного направления принадлежит ученым Института машиноведения им. А.А. Благоврава [13–20].

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях линейной системы с учетом источника энергии из монографии В.О. Кононенко [8]. Динамическая схема этой задачи приведена на рис. 5.

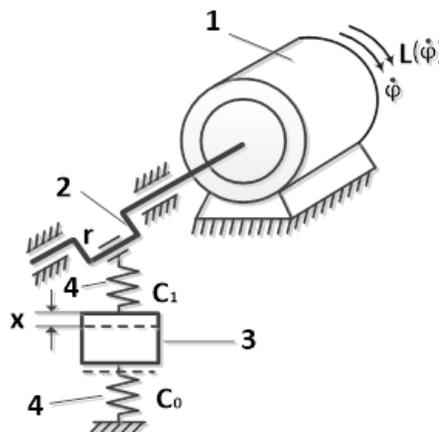


Рис. 5. Схема колебательной системы с источником энергии

Fig. 5. Diagram of an oscillatory system with an energy source

Здесь во время вращения двигателя 1 с известной характеристикой $L(\dot{\varphi})$ кривошип 2, радиус которого равен r , перемещает упругое тело 3 массой m , деформируя упругую связь 4 жесткостью c_1 , благодаря чему создается сила, равная $c_1 r \cdot \sin \varphi$, и ее момент $-c_1 r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot \cos \varphi$. Составляя далее выражения для кинетической и потенциальной энергий и применяя уравнения Лагранжа второго рода, получим уравнения движения:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = c_1 r \cdot \sin \varphi, \quad (6)$$

$$I\ddot{\varphi} + H(\dot{\varphi}) = L(\dot{\varphi}) + c_1 r(x - r \sin \varphi) \cdot \cos \varphi,$$

где m — масса колебательной системы; $c = c_0 + c_1$ — жесткость колебательной системы; I — момент инерции вращающихся масс. В уравнениях учтены:

– сила сопротивления колебательному движению $R = \beta \dot{x}$;

– момент сопротивления вращению ротора $H(\dot{\varphi})$;

– движущий момент источника энергии $L(\dot{\varphi})$ как характеристика двигателя.

Ожидая наиболее активное взаимодействие колебательной системы с источником энергии, будем рассматривать колебания в области основного резонанса и полагать, что разность между частотой собственных колебаний

и частотой возмущающей силы мала. Будем также считать малыми возмущающую силу $c_1 r \cdot \sin \varphi$ и силу сопротивления $R = \beta \dot{x}$, а режим движения близким к стационарному. Тогда уравнения (6) можно записать в форме, содержащей малый параметр ε :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(q \sin \varphi - h \dot{x}),$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon[M_1(\dot{\varphi}) + q_1(x - r \sin \varphi) \cdot \cos \varphi],$$

где $\omega^2 = c / m$, $\varepsilon q = c_1 r / m$, $\varepsilon q_1 = c_1 r / I$, $\varepsilon h = \beta / m$, $\varepsilon M_1(\dot{\varphi}) = (1 / I) \cdot [L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})]$.

Приводя далее эту систему уравнений к стандартной форме и применяя метод теории возмущений Боголюбова, получаем в первом приближении для стационарных режимов колебаний амплитуду – a , фазу – α и уравнение частоты вынужденных колебаний Ω :

$$a = \frac{c_1 r}{m \sqrt{4\omega^2(\omega - \Omega)^2 + \beta^2 \omega^2 / m}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2m}{\beta}(\omega - \Omega);$$

$$L(\Omega) = H(\Omega) - \frac{1}{2} \beta \omega a^2.$$

Решение уравнения (7) можно представить в графической форме (рис. 6).

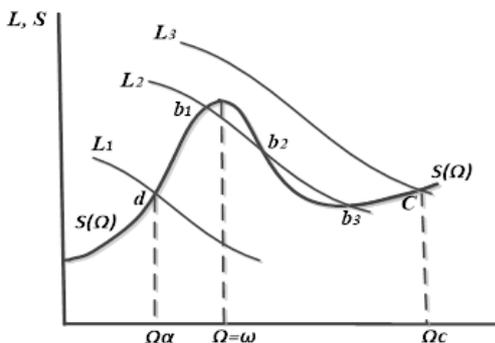


Рис. 6. Графики S и L
Fig. 6. Graphics S and L

На рис. 6 изображен график функции:

$$S(\Omega) = H(\Omega) + \frac{1}{2} \beta \omega a^2 =$$

$$= H(\Omega) + \frac{\beta}{2} \frac{c_1 r}{4\omega^2(\omega - \Omega)^2 + \beta^2 \omega^2 / m^2}$$

и график $L(\Omega)$ – характеристики источника энергии. Сравнивая этот график с рис. 4, мы можем провести аналогию между эффектом «застывания» маятника на вращающемся валу и колебаниями систем с ограниченным возбуждением в части математического описания.

Эффект Зоммерфельда

Эффект Зоммерфельда – частный случай колебательных систем с ограниченным возбуждением, и вместе с тем это явление послужило началом создания нового раздела теории колебаний – «Колебательные системы с ограниченным возбуждением». Эффектом Зоммерфельда ученые назвали результаты одного из экспериментов выдающегося ученого-физика Арнольда Зоммерфельда.

Суть эксперимента заключалась в наблюдении за изменением угловой скорости электродвигателя, на валу которого была создана искусственная неуравновешенность, при увеличении тока на обмотках электродвигателя. Оказалось, что при достижении некоторого значения угловая скорость почти не изменялась, несмотря на увеличение мощности двигателя, а потом все же при увеличении мощности двигателя совершала резкий скачок. При этом наблюдались колебания стола, на котором был установлен электродвигатель.

Ученый справедливо предположил, что подаваемая мощность поглощалась колебаниями и подсчитал собственные частоты колебаний стола на четырех ножках. Полученные значения собственных частот почти совпали с значениями «застывшей» угловой скорости [21, 22]. Таким образом, А. Зоммерфельд экспериментально открыл эффект взаимодействия работы двигателя и колебательной системы. Разработка теории, описывающей это явление, произошла значительно позже [9, 23–26].

Следуя работе И.И. Блехмана [9], рассмотрим механическую систему для моделирования эффекта Зоммерфельда (рис. 7).

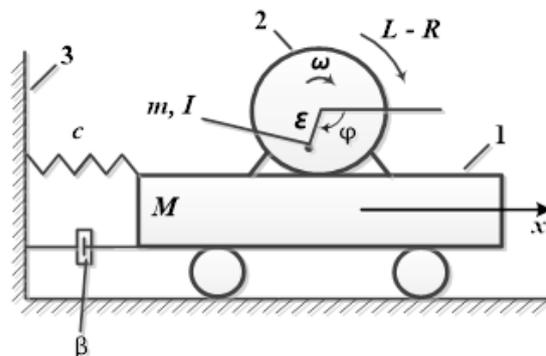


Рис. 7. Механическая система для моделирования эффекта Зоммерфельда
Fig. 7. A mechanical system for simulating the Sommerfeld effect

Здесь на жесткой платформе 1 установлен неуравновешенный ротор 2, приводимый во вращение от электродвигателя. Статический эксцентриситет массы ротора обозначим ε . Платформа может перемещаться вдоль фиксированного направления (по оси x). С неподвижным основанием 3 она связана упругими элементами жесткостью c и демпфирующим элементом с коэффициентом вязкого трения β .

За обобщенные координаты выберем φ – угол поворота двигателя и x – смещение платформы.

При выбранных обобщенных координатах уравнения движения системы имеют вид:

$$I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - R(\dot{\varphi}) + m\dot{x}\varepsilon \sin \varphi,$$

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = m\varepsilon(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi).$$

Здесь M – масса платформы; m – масса ротора; $M^* = M + m$ – масса системы; I – момент инерции ротора; $L(\dot{\varphi})$ – вращающий момент двигателя (статическая характеристика двигателя); $R(\dot{\varphi})$ – момент сил сопротивления. Влияние силы тяжести на ротор и динамику электродвигателя учитывать не будем.

В качестве исходного приближения принимается $\varphi = \varphi_1 = \omega t$; $x = x_1 = P \sin \omega t + Q \cos \omega t$, где $\omega = \omega(t)$, P и Q – медленно меняющиеся, а x_1 – быстро меняющиеся функции времени. Далее используя метод прямого разделения движений, было получено следующее уравнение для частоты вращения двигателя:

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + V(\omega). \quad (8)$$

Здесь

$$V(\omega) = m\varepsilon \langle \ddot{x}_1 \sin \omega t \rangle = -\frac{(m\varepsilon\omega)^2}{M^*} \frac{m\varepsilon\omega^2}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2\omega^2} = -n\omega M^* A^2,$$

где $V(\omega)$ – вибрационный момент, представляющий дополнительную нагрузку на ротор, обусловленную колебаниями платформы, на которую он установлен. В этом выражении угловые скобки указывают на осреднение за период $T = 2\pi$ по «быстрому» времени $\tau = \omega t$ и приняты обозначения:

$$p^2 = c / M^*; 2n = \beta / M^*; A = \frac{m\varepsilon\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Здесь A представляет собой амплитуду колебаний платформы, описываемую уравнением:

$$M^* \ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t.$$

Амплитуда A связана с P и Q соотношением $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$, причем

$$P = \frac{m\varepsilon\omega^2}{M^*} \frac{2n\omega}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2\omega^2};$$

$$Q = \frac{m\varepsilon\omega^2}{M^*} \frac{p^2 - \omega^2}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Решение уравнения (8) представляется в графической форме (рис. 8).

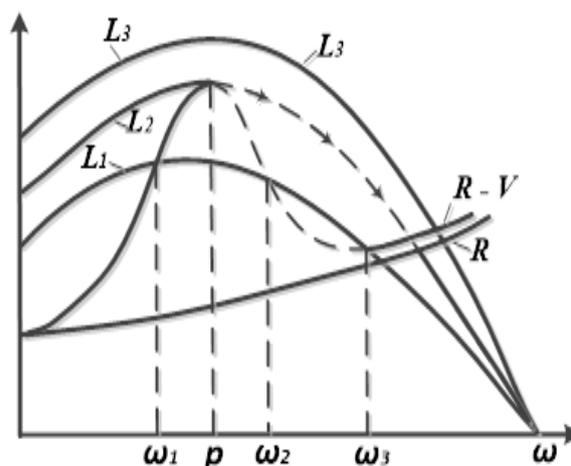


Рис. 8. Графическое решение уравнения для частоты вращения двигателя

Fig. 8. Graphical solution of the equation for engine speed

Уравнение (8) для стационарных значений $\omega = \text{const}$ имеет либо три решения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, где кривые L соответствуют статическим характеристикам электродвигателей. Решение при $\omega_1 < p$ является дорезонансным, при $\omega_2 > p$ – послерезонансным, а при $\omega_3 \gg p$ – далеко послерезонансным. При этом решения ω_1 и ω_3 являются устойчивыми, а ω_2 – неустойчивым. Характеристике L_1 отвечает «застревание» системы вблизи резонанса на частоте ω_1 (эффект Зоммерфельда), а характеристике L_3 более мощного двигателя – выход на нормальный рабочий режим. Характеристике L_2 соответствует скачкообразный переход от резонансного в далеко зарезонансный режим. Сравнивая график на рис. 8 с графиком на рис. 4 можно увидеть аналогию эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу механической системы и эффекта Зоммерфельда.

Несинхронное движение шаров в камере автобалансира

Несинхронное движение шариков (роликов) в автобалансирующем устройстве было обнаружено и исследовано учеными из Университета Отто фон Герике в Магдебурге в 1999–2004 гг. [5–7]. В работах приведены результаты исследований процесса автоматической балансировки жесткого статически неуравновешенного ротора на изотропных упругих опорах. Основной деталью (частью) автобалансира являлась цилиндрическая камера, заполненная вязкой жидкостью, с исполнительными элементами в виде шариков (роликов) на кольцевых дорожках. Было установлено, что в процессе запуска ротора до рабочей скорости при его прохождении через критическую скорость (автобалансировка возможна только в закритической области) в некоторых случаях шарики (ролики) не могли разогнаться до рабочей скорости ротора для его уравновешивания, а совершали несинхронное движение, циркулируя в камере со угловой скоростью, равной критической скорости ротора. Авторы считают, что это явление похоже, но не идентично известному эффекту Зоммерфельда в несбалансированном роторе с ограниченным при-

водным моментом. Рассмотрим модель ротора с автобалансирующим устройством из работы [7] (рис. 9).

В плоскости рисунка изображен ротор массы m и моментом инерции I относительно оси перпендикулярной плоскости рисунка, имеющий три обобщенные координаты x , y и φ_0 . Автобалансир представляет собой закрытую цилиндрическую полость с вязкой жидкостью, в которой находятся два шарика (ролика) массами m_1 , m_2 и угловыми координатами φ_1 , φ_2 . Неуравновешенность ротора изображалась в виде точечной массы m_0 с угловой координатой φ_0 .

Для данной модели была составлена система дифференциальных уравнений, позволяющая изучить случаи, в которых может наблюдаться несинхронное движение шариков (роликов):

- движение ротора с дисбалансом без компенсирующих элементов (шариков, роликов);
- движение ротора без дисбаланса с одним компенсирующим элементом;
- движение ротора без дисбаланса с двумя компенсирующими элементами;
- движение ротора с дисбалансом и двумя компенсирующими элементами.

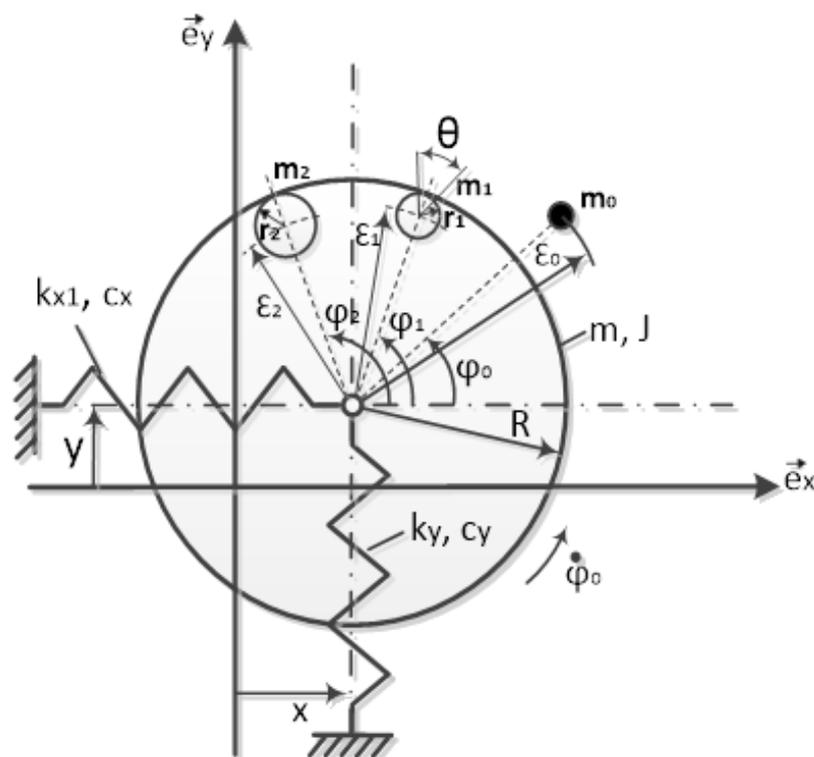


Рис. 9. Модель ротора с шаровым автобалансиром в плоскости
Fig. 9. A model of a rotor with a ball auto-balancer in the plane

Рассмотрим случай движения ротора без дисбаланса с одним компенсирующим шариком (роликом). Уравнение движения модели в этом случае в обозначениях авторов имеет вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= m_1 \varepsilon_1 (\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1); \\ M\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= m_1 \varepsilon_1 (\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1); \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_{00}\ddot{\varphi}_0 - I_{01}\ddot{\varphi}_1 + \beta_0\dot{\varphi}_0 - \beta_1\dot{\varphi}_1 = L_0;$$

$$I_{01}\ddot{\varphi}_0 + I_{11}\ddot{\varphi}_1 - \beta_1\dot{\varphi}_0 + \beta_1\dot{\varphi}_1 + B_1 = 0,$$

где $B_1 = -m_1 \varepsilon_1 (\ddot{x} \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1)$.

Здесь M – масса ротора с шариком (роликом); c – коэффициент сопротивления движению ротора по направлениям x , y ; k – коэффициент жесткости упругих опор по этим направлениям; I_{00} , I_{01} , I_{11} – моменты инерции ротора и шарика (ролика); β_0 , β_1 – коэффициенты сопротивления вращению ротора и движения шарика (ролика); L_0 – постоянная составляющая крутящего момента ротора; ε_1 – расстояние между центрами ротора и шарика (ролика).

В первом приближении $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 = \text{const}$; $\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \text{const}$; $\varphi_1 = \omega_1 t$; $\Omega = L_0 / \beta_0 = \text{const}$.

Тогда первые два уравнения системы (9) примут вид:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_1 \varepsilon_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t;$$

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m_1 \varepsilon_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t,$$

а их решением будут $x = A \cdot \cos(\omega_1 t - \gamma)$, $y = A \cdot \sin(\omega_1 t - \gamma)$, где

$$A = \frac{m_1 \varepsilon_1 \omega_1^2}{\sqrt{M^2 (\omega_{\text{кр}}^2 - \omega_1^2)^2 + c^2 \omega_1^2}};$$

$$\gamma = \arctg \frac{c \omega_1}{M (\omega_{\text{кр}}^2 - \omega_1^2)}; \quad \omega_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Тогда $B = m_1 \varepsilon_1 \omega_1^2 A \sin \gamma$. Подставляя x и y в четвертое выражение системы уравнений (9) получим зависимость угловой скорости шарика (ролика) от угловой скорости ротора:

$$\beta_1 \omega_1 = V_1 + \beta_1 \omega_0, \quad (10)$$

где $A = \frac{m_1^2 \varepsilon_1^2 c \omega_1^5}{M^2 (\omega_{\text{кр}}^2 - \omega_1^2)^2 + c^2 \omega_1^2}$ является

вибрационным моментом.

На основе уравнения (10) может быть графически построена функция зависимости ω_1 от ω_0 (рис. 10).

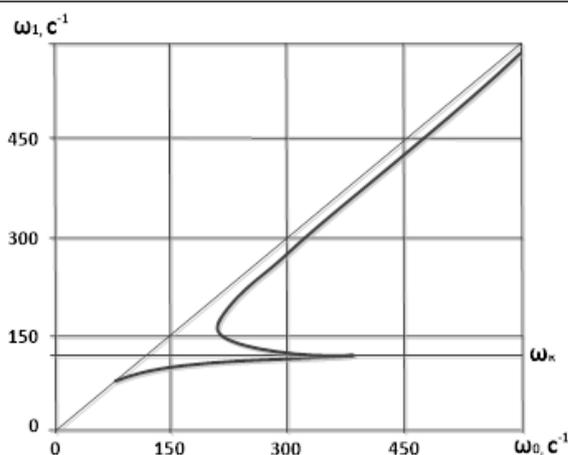


Рис. 10. График зависимости ω_1 от ω_0
Fig. 10. Graph of the dependence of ω_1 on ω_0

Как видно из рис. 10, угловая скорость шарика (ролика) при приближении ее значения к значению критической скорости на определенный период времени принимает значение критической скорости, а потом, при увеличении угловой скорости ротора, угловая скорость шарика (ролика) резко возрастает и он совершает движения вместе с ротором, обеспечивая компенсацию его неуравновешенности. Таким образом, это можно характеризовать как аналог эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу.

Позже, в 2012 г., подобное явление в шаровом автобалансире было исследовано китайскими учеными [27].

Заключение

Проведено моделирование эффекта «застревания» маятника на вращающемся валу. С использованием разумных допущений и операции осреднения получено приближенное уравнение движения маятника, которое наглядно показывает, что его угловая скорость на вращающемся валу механической системы зависит не только от момента инерции маятника и трения в его опоре, но и собственной частоты колебаний и демпфирования механической системы. Это при определенных условиях является причиной того, что угловая скорость маятника равна одной из частот собственных колебаний механической системы. Аналогами эффекта «застревания» маятника в большей или меньшей степени можно считать явления, которые возникают при колебаниях механических систем с ограниченной мощностью двигателя, эффект Зоммерфельда и явление несинхронного движения шариков (ро-

ликов) в шаровом автобалансире. В первых двух случаях аналогии носят больше математический характер, чем физический. Самым близким к эффекту «застревания» маятника является эффект несинхронного движения шариков (роликов) в автобалансире, тем более, что тот и другой обнаружены при изучении автоматической

балансировки ротора. Однако «застревание» маятника на вращающемся валу было обнаружено в России в 1992 г., а эффект несинхронного движения шариков в Магдебурге в 1999–2000 гг., т.е. приоритет открытия эффекта «застревания» маятника остается за Российской Федерацией.

Список литературы

1. Артюнин А.И., Жаров В.П. Новый эффект в нелинейной механике // Механика деформированного твердого тела : Межвуз. сб. науч. тр. Ростов-на-Дону, 1992. С. 3–11.
2. Артюнин А.И. Исследование движения ротора с автобалансиром // Изв. вузов. Машиностроение. 1993. № 1. С. 7–15.
3. Артюнин А.И. Эффект «застревания» и особенности движения ротора с маятниковыми автобалансирами // Наука и образование. 2013. № 8. С. 443–454.
4. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Механико-математическое моделирование эффекта застревания маятников на вращающемся роторе // Вестн. Белорус. гос. ун-та трансп. : наука и транспорт. 2016. № 2 (33). С. 172–175.
5. Zum Sommerfeld effekt beim selbsttätigen Auswuchten einer Ebene / B. Ryzhik, T. Amer, H. Duckstein u.a. // Technische Mechanik. 2001. Bd. 21. Heft 4. S. 297–312.
6. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. 2004. Bd. 24. Heft 1. S. 1–24.
7. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous Motions Near Critical Speeds in a Single-plane Autobalancing Device // Technische Mechanik. 2004. Bd. 24. Heft 1. S. 25–36.
8. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М. : Наука, 1964. 254 с.
9. Блехман И.И. Вибрационная механика. М. : Физматлит, 1994. 394 с.
10. Кононенко В.О., Фролов К.В. О взаимодействии нелинейной колебательной системы с источником энергии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 5. С. 69–76.
11. Кононенко В.О. Вопросы динамического взаимодействия машины с источником энергии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 19–30.
12. Кононенко В.О. Нелинейные колебания механических систем. Киев : Наук. думка, 1980. 382 с.
13. Фролов К.В. Об автоколебаниях с учетом свойств источника энергии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 83–86.
14. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. М. : Машиностроение, 1979. 351 с.
15. Алифов А.А., Глухарев К.К., Фролов К.В. К теории колебаний элементов машин, содержащих источники энергии ограниченной мощности // Теория механизмов и машин : материалы I Всесоюз. съезда. Алматы, 1977. С. 84.
16. Фролов К.В. Нелинейные резонансные эффекты в механических системах при учете свойств источника энергии // Вестник АН СССР. 1987. № 10. С. 9–20.
17. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источником энергии. М. : Наука. 1985. 327 с.
18. Фролов К.В. Избранные труды : в 2 т. Т. 1. Вибрация и техника. М. : Наука, 2007. 351 с.
19. Краснополская Т.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М. ; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2008. 280 с.
20. Гуськов А.М., Пановко Г.Я. Нелинейные эффекты при колебаниях линейных систем с центробежным возбудителем ограниченной мощности // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 6. С. 115–125.
21. Sommerfeld A. Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehr // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1902. Band 46. S. 391–394.
22. Sommerfeld A. Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1904. Bd. 48. S. 631–636.
23. Диментберг М.Ф., Фролов К.В. Эффект Зоммерфельда в системе со случайно изменяющейся собственной частотой // Доклады АН СССР. 1966. Т. 171. № 6. С. 1293–1296.
24. Ганиев Р.Ф., Краснополская Т.С. Научное наследие В.О. Кононенко: эффект Зоммерфельда-Кононенко // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 8. С. 3–15.
25. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М. : Наука, 1971. 894 с.
26. Блехман И.И., Индейцев Д.А., Фрадков А.Л. Медленные движения в системах с инерциальным возбуждением колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 1. С. 25–32.
27. Lu C.-J., Tien M.-H. Pure-rotary periodic motions of a planar two-ball auto-balancer system // Mechanical Systems and Signal Processing. 2012. Vol. 32. P. 251–268.

References

1. Artyunin A.I., Zharov V.P. Novyi effekt v nelineinoi mekhanike [A new effect in nonlinear mechanics]. *Mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov «Mekhanika deformirovannogo tverdogo tela»* [Interuniversity proceedings «Mechanics of a deformed solid»]. Rostov-on-Don, 1992, pp. 3–11.

2. Artyunin A.I. Issledovanie dvizheniya rotora s avtobalansom [Investigation of rotor motion with an auto-balancer]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie* [Bulletins of highest educational organizations. Mechanical engineering], 1993, no. 1, pp. 7–15.
3. Artyunin A.I. Effekt «zastrevaniya» i osobennosti dvizheniya rotora s mayatnikovymi avtobalansirami [The effect of «jamming» and the features of the rotor movement with pendulum auto-balancers]. *Nauka i obrazovanie* [Science and Education], 2013, no. 8, pp. 443–454.
4. Eliseev S.V., Artyunin A.I. Mekhaniko-matematicheskoe modelirovanie effekta zastrevaniya mayatnikov na vrashchayushchemsya rotore [Mechanical and mathematical modeling of the effect of pendulum jamming on a rotating rotor]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta transporta: nauka i transport* [Bulletin of the Belarusian State University of Transport: Science and Transport], 2016, no. 2 (33), pp. 172–175.
5. Ryzhik B., Amer T., Duckstein H., L. Sperling. Zum Sommerfeldeffekt beim selbsttätigen Auswuchten einer Ebene. *Technische Mechanik*. 2001. Band 21. Heft 4. Pp. 297–312.
6. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors. *Technische Mechanik*. 2004. Band 24. Heft 1. Pp. 1–24.
7. Ryzhik B., Sperling L., Duckstein H. Non-synchronous Motions Near Critical Speeds in a Single-plane Autobalancing Device. *Technische Mechanik*. 2004. Band 24. Heft 1. Pp. 25–36.
8. Kononenko V.O. Kolebatel'nye sistemy s ogranichennym vzbuzhdeniem [Oscillatory systems with limited excitation]. Moscow: Nauka Publ., 1964. 254 p.
9. Blekhan I.I. Vibratsionnaya mekhanika [Vibration mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 1994. 394 p.
10. Kononenko V.O., Frolov K.V. O vzaimodeistvii nelineinoi kolebatel'noi sistemy s istochnikom energii [On the interaction of a nonlinear oscillatory system with an energy source]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i mashinostroenie* [Bulletins of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Mechanics and mechanical engineering], 1961, no. 5, pp. 69–76.
11. Kononenko V.O. Voprosy dinamicheskogo vzaimodeistviya mashiny s istochnikom energii [Questions of dynamic interaction of a machine with an energy source]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletins of the USSR Academy of Sciences. Solid state mechanics], 1975, no. 5, pp. 19–30.
12. Kononenko V.O. Nelineinye kolebaniya mekhanicheskikh sistem [Nonlinear oscillations of mechanical systems]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1980. 382 p.
13. Frolov K.V. Ob avtokolebaniyakh s uchetoм svoystv istochnika energii [On self-oscillations taking into account the properties of an energy source]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i mashinostroenie* [Bulletins of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Mechanics and mechanical engineering], 1962, no. 1, pp. 83–86.
14. Vibratsii v tekhnike (spravochnik v 6 t). T. 2. Kolebaniya nelineinykh mekhanicheskikh sistem [Vibrations in engineering (handbook in 6 vol.). Vol. 2. Vibrations of nonlinear mechanical systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1979. 351 p.
15. Alifov A.A., Glukharev K.K., Frolov K.V. K teorii kolebaniy elementov mashin, sodержashchikh istochniki energii ogranichennoi moshchnosti [On the theory of vibrations of elements of machines containing energy sources of limited power]. *Materialy I Vsesoyuznogo s'ezda «Teoriya mekhanizmov i mashin»* [Proceedings of the I All-Union Congress «Theory of mechanisms and machines»]. Almaty, 1977. P. 84.
16. Frolov K.V. Nelineinye rezonansnye efekty v mekhanicheskikh sistemakh pri uchete svoystv istochnika energii [Nonlinear resonance effects in mechanical systems taking into account the properties of an energy source]. *Vestnik Akademii nauk SSSR* [Bulletin of the USSR Academy of Sciences], 1987, no. 10, pp. 9–20.
17. Alifov A.A., Frolov K.V. Vzaimodeistvie nelineinykh kolebatel'nykh sistem s istochnikom energii [Interaction of nonlinear oscillatory systems with an energy source]. Moscow: Nauka Publ., 1985. 327 p.
18. Frolov K.V. Izbrannyye trudy (v 2 t). T. 1. Vibratsiya i tekhnika [Selected works (in 2 volumes). Vol. 1. Vibration and technology]. Moscow: Nauka Publ., 2007. 351 p.
19. Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu. Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika sistem s ogranichennym vzbuzhdeniem [Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation]. Moscow; Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2008. 280 p.
20. Gus'kov A.M., Panovko G.Ya. Nelineinye efekty pri kolebaniyakh lineinykh sistem s tsentrobezhnym vzbuditelem ogranichennoi moshchnosti [Nonlinear effects during oscillations of linear systems with a centrifugal exciter of limited power]. *Vestnik MGTU im. N.E.Baumana. Seriya «Mashinostroenie»* [Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. The series «Mechanical Engineering»], 2012, no. 6, pp. 115–125.
21. Sommerfeld A. Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehr. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1902. Band 46. Pp. 391–394.
22. Sommerfeld A. Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1904. Band 48. Pp. 631–636.
23. Dimentberg M.F., Frolov K.V. Effekt Zommerfel'da v sisteme so sluchaino izmenyayushchey sobstvennoi chastotой [Sommerfeld effect in a system with randomly varying natural frequency]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1966, vol. 171, no. 6, pp. 1293–1296.
24. Ganiev R.F., Krasnopol'skaya T.S. Nauchnoe nasledie V.O. Kononenko: effekt Zommerfel'da-Kononenko [V.O. Kononenko's scientific legacy: Sommerfeld-Kononenko effect]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and machine reliability], 2018, no. 8, pp. 3–15.
25. Blekhan I.I. Sinkhronizatsiya dinamicheskikh sistem [Synchronization of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 894 p.

26. Blekhman I.I., Indeitsev D.A., Fradkov A.L. Medlennye dvizheniya v sistemakh s inertial'nym vzbuzhdeniem kolebaniy [Slow movements in systems with inertial excitation of oscillations]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and reliability of machines], 2008, no. 1, pp. 25–32.

27. Lu C.-J., Tien M.-H. Pure-rotary periodic motions of a planar two-ball auto-balancer system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, vol. 32, pp. 251–268.

Информация об авторах

Артюнин Анатолий Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики, механики и приборостроения, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск; e-mail: artyunin_ai@irgups.ru.

Суменков Олег Юрьевич, аспирант научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, Научно-технологический университет Сириус, г. Сочи; e-mail: artunina2107@yandex.ru.

Information about the authors

Anatolii I. Artyunin, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of the Department of Physics, Mechanics and Instrumentation, Irkutsk State Transport University, Irkutsk; e-mail: artyunin_ai@irgups.ru.

Oleg Yu. Sumenkov, Ph.D. student of the Scientific Center of Information Technologies and Artificial Intelligence, Sirius University of Science and Technology, Sochi; e-mail: artunina2107@yandex.ru.