

Неравноупругость железнодорожного пути и ее учет в математических моделях подвижного состава ОАО «Российские железные дороги»

В.А. Нехаев¹✉, Е.Г. Леоненко²

¹Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск, Российская Федерация

²Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск, Российская Федерация

✉nehaevva@rambler.ru

Резюме

Проблема взаимодействия подвижного состава и железнодорожного пути является важнейшей для железнодорожного транспорта. До настоящего времени она не решена в полном объеме, видимо, из-за сложности соответствующих математических моделей. Для решения данной проблемы следует менять парадигму математических моделей, переходя от обыкновенных дифференциальных уравнений на обыкновенные дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами. Большинство исследователей в расчетах динамики взаимодействия железнодорожного пути и подвижного состава вертикальную жесткость пути принимают постоянной величиной в продольном направлении, а это не так. Даже в случае «бархатного» пути существует его неравноупругость, жесткости над шпалой и в междушпальном ящике, по данным профессоров М.Ф. Вериги и А.Я. Когана, отличаются, такой вывод сделан на основании экспериментальных данных Всесоюзного научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. Также необходимо учитывать, что жесткости по левым и правым колесам не идентичны. В новой парадигме обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными, случайными или параметрическими коэффициентами меняются понятия резонанса и устойчивости. Из приведенных расчетов видно, что при введении показателя силы тяжести и учете параметров подвижного состава, а также жесткости пути под левым и правым колесами, величины подпрыгивания и боковой качки с увеличением скорости значительно возрастают, что может привести к разгрузке колеса и, как следствие, к его вползанию на головку рельса.

Ключевые слова

железнодорожный путь, подвижной состав, неравноупругость пути, жесткость пути, подпрыгивание колесной пары, боковая качка, математическая модель

Для цитирования

Нехаев В.А. Неравноупругость железнодорожного пути и его учет в математических моделях подвижного состава Российских железных дорог / В.А. Нехаев, Е.Г. Леоненко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2023. № 3(79). С. 97–111. DOI 10.26731/1813-9108.2023.3(79).97-111.

Информация о статье

поступила в редакцию: 23.06.2023 г.; поступила после рецензирования: 05.09.2023 г.; принята к публикации: 07.09.2023 г.

The non-uniform elasticity of the railway track and its considering in mathematical models of rolling stock of JSC «Russian Railways»

V.A. Nekhaev¹✉, E.G. Leonenko²

¹Omsk State Transport University, Omsk, the Russian Federation

²Krasnoyarsk Rail Transport Institute, a branch of Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk, the Russian Federation

✉nehaevva@rambler.ru

Abstract

The problem of interaction between rolling stock and railway track is relevant and important for railway transport. To date, it has not been fully solved, apparently due to the complexity of the corresponding mathematical models. To solve this problem, it is necessary to change the paradigm of mathematical models, moving from ordinary differential equations to ordinary differential equations with random coefficients. Most researchers in the calculations of the dynamics of the interaction between the railway track and rolling stock, the vertical rigidity of the track is assumed to be a constant value in the longitudinal direction, which is not true. Even in the case of a «velvet» track, its non-uniform elasticity exists, the stiffness above the sleeper and in the intersleeper box, according to professors M.F. Verigo and A.Ya. Kogan, differ on the basis of experimental data from All-Union Scientific and Research Institute of Railway Transport. It is also necessary to take into account that the stiffnesses of the left and right wheels are not identical. In the new paradigm of ordinary differential equations with variable, random or parametric coefficients, the concepts of resonance and stability are changing. From the above calculations, it can be seen that with taking into account gravity in the calculations and the parameters of the rolling stock, as well as the stiffness of the track under the left and

right wheels, the values of bouncing and lateral pitching increase significantly with increasing speed, which can lead to unloading of the wheel, and as a consequence - to its crawling onto the rail head.

Keywords

railway track, rolling stock, track non-uniform elasticity, track stiffness, wheelset bouncing, lateral pitching, mathematical model

For citation

Nekhaev V.A., Leonenko E.G. Neravnouprugost' zheleznodorozhnogo puti i ego uchet v matematicheskikh modelyakh podvizhnogo sostava OAO «Rossiiskie zheleznye dorogi» [The non-uniform elasticity of the railway track and its considering in mathematical models of rolling stock of JSC «Russian Railways»]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2023, no. 3(79), pp. 97–111. DOI: 10.26731/1813-9108.2023.3(79).97-111.

Article Info

Received: June 23, 2023; Revised: September 5, 2023; Accepted: September 7, 2023.

Введение

Современный железнодорожный путь – это чрезвычайно сложная конструкция. Для ее введения в математические модели учеными, занимающимися задачами железнодорожного транспорта, были разработаны три математические модели железнодорожного пути. Первая – это абсолютно жесткий путь, характеризуемый только одной геометрической неровностью. Ее апологетом был профессор Российского университета транспорта (МИИТ) В.Б. Медель, утверждавший, что жесткость железнодорожного пути значительно выше жесткости буксового подвешивания, поэтому жесткостью пути можно и нужно пренебречь [1, 2]. Второй моделью была дискретная безынерционная, учитывающая только силы упругости и трения, а также геометрическую неровность. Третья модель называется дискретной инерционной, следовательно, относительно второй модели она дополнена «приведенной» массой пути. Действительно, каждый из нас, стоявший недалеко от железнодорожного пути в момент прохождения поезда, ощущал колебания земляного полотна под ногами. По этой причине и была введена соответствующая масса, определить которую можно только экспериментальными методами. Последняя континуальная модель с различными основаниями по Фойгту, Винклеру и т.п. себя, вообще говоря, не оправдала по причине сильной демпфированности системы и больших баз тележек, с одной стороны, а с другой – работники путевого хозяйства строят еще более сложные расчетные схемы пути, но в качестве возмущающего фактора принимают просто силу.

Сотрудники Днепровского национально-го университета железнодорожного транспорта (ДИИТ) и профессор В.П. Ткаченко из Луган-

ского державного университета доказали, что дискретная инерционная модель железнодорожного пути вполне пригодна для исследований взаимодействия подвижного состава и пути, так как ошибка не превышает 5–7 %.

Целью данной работы является введение в рассмотрение железнодорожниками продольной неравноупругости пути. Другими словами, мы должны сменить парадигму с обыкновенных дифференциальных уравнений на дифференциальные уравнения с переменными (периодическими) коэффициентами. В результате изменяются такие понятия, как резонанс и влияние на него вязкого трения. В старой парадигме под резонансом понималось совпадение какой-либо собственной частоты с частотой вынуждающей силы.

В новой парадигме различают простые и комбинационные резонансы суммарного или разностного типа. Более того, наличие диссипативных сил вязкого трения в старой парадигме всегда ограничивало резонансную амплитуду. В новой парадигме существование диссипативных сил не гарантирует ухода системы в бесконечность, а лишь создает пороговое значение для коэффициента параметрического возбуждения. Грубо говоря, поведение обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными (периодическими) коэффициентами принципиально отличается от поведения аналогичных уравнений с постоянными коэффициентами. Вообще говоря, продольная неравноупругость должна нормироваться, как это сделано железнодорожниками в случае геометрических неровностей на поверхности катания рельсов. С другой стороны, наука требует совершенствования вопроса взаимодействия подвижного состава и железнодорожного пути.

Численное доказательство необходимости учета продольной нелинейности железнодорожного пути

Итак, откажемся от используемого практически всеми железнодорожниками допущения о постоянстве вертикальной жесткости пути и рассмотрим движение колесной пары экипажа по нелинейному пути, описываемое уравнениями:

$$\begin{cases} m\ddot{q} + (\beta_6 + \beta_n)\dot{q} + \{c_6 + c_0[1 - 2\mu \cos(2\Omega t)]\}q; \\ f(t) \approx \frac{P_{ст}}{mk_0^2} [1 + 2\mu \cos(2\Omega t)]. \end{cases} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) описывает относительное движение колесной пары в движущейся системе координат с постоянной скоростью, второе уравнение представляет собой переносное движение колесной пары. Из курса теоретической механики и физики известно, что абсолютное движение твердого тела складывается из переносного и относительного движений.

Продифференцируем так называемый статический прогиб железнодорожного пути дважды по времени t и после подстановки результатов в первое уравнение системы (1) и несложных преобразований получим дифференциальное уравнение, которое в дальнейшем будем численно интегрировать:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2n\dot{q} + k_0^2(1 + 2\mu \cos 2\Omega t)q = \\ = 8\mu\Omega^2 \frac{P_{ст}}{mk_0^2} \left(\mu \cos \Omega t + \frac{\delta}{\lambda} \sin 2\Omega t \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $2n = (\beta_6 + \beta_n) / m$ – коэффициент демпфи-

вания колесной пары, $k_0^2 = (c_6 + c_0) / m$ – квадрат собственной частоты консервативной системы (колесной пары), $\lambda = \Omega / k_0$ – расстройка системы по частоте (если она равна единице, то исследуемая система находится в области главного параметрического резонанса).

Интегрирование осуществлялось численным методом. В результате получено, что в случае попадания в область главного параметрического резонанса, когда диссипативные силы меньше критического значения коэффициента параметрического возмущения, т.е. $\mu \geq \mu_{кр}$, то в системе развивается параметрический резонанс, причем частота параметрического возмущения Ω близка к собственной частоте подпрыгивания колесной пары и наличие вязких диссипативных сил не способно ограничить резонансную амплитуду. Расчетами установлено, что параметрический резонанс колесной пары подвижного состава возникает при коэффициенте параметрического возбуждения более 0,3 (рис. 1). В предыдущей парадигме математических моделей такое явление невозможно. Следовательно, учет продольной нелинейности железнодорожного пути обязателен в расчетных схемах подвижного состава.

Расчет движения подвижного состава по равноупругому пути

Для разъяснения нелинейности пути возьмем простейшую расчетную схему – колесную пару, на которую действуют сила, приходящаяся со стороны экипажа, сила тяжести самой колесной пары, силы упругости пути

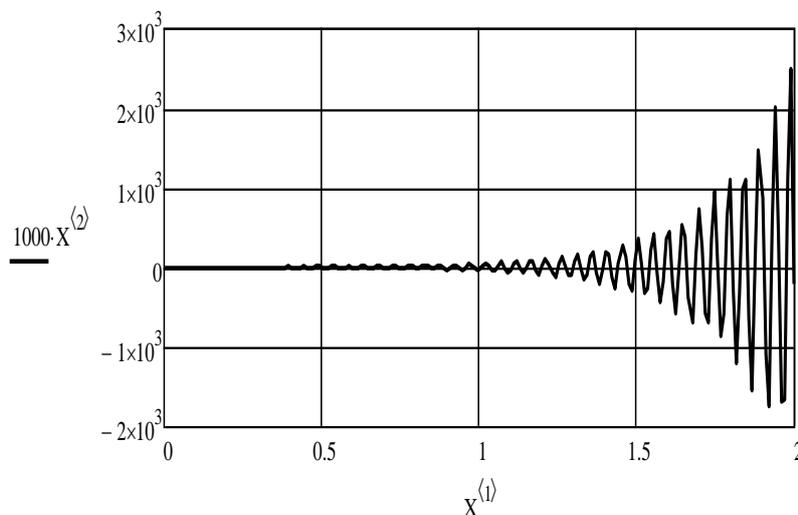


Рис. 1. Параметрический резонанс колесной пары экипажа возникает при $\mu > 0,3$
 Fig. 1. Parametric resonance of a rolling stock wheelset occurs at $\mu > 0,3$

и буксового подвешивания. Уравнение движения такой простой расчетной схемы мы составим с помощью второго уравнения Ньютона, выбрав инерциальную неподвижную систему координат:

$$m\ddot{z} = P + mg - (c_6 + c_n)z - (\beta_6 + \beta_n)\dot{z}, \quad (2)$$

здесь m – масса колесной пары; P – вес экипажа, приходящийся на одну колесную пару; c_6, c_n – жесткость буксового подвешивания и жесткость железнодорожного пути (в данный момент совсем неважно постоянная эта величина или нет); β_6, β_n – коэффициенты вязкого трения в буксовом подвешивании и в пути; z – абсолютная координата подпрыгивания колесной пары. Перепишем (2) в более привычном виде:

$$m\ddot{z} + (c_6 + c_n)z - (\beta_6 + \beta_n)\dot{z} = P_{ст}.$$

Теперь положим, что жесткость пути постоянна по протяженности, $c_n = \text{const}$. Тогда избавимся от постоянной правой части заменой переменной:

$$z = f + q. \quad (3)$$

Взяв от (3) производную по времени, считая переменную f константой, получим:

$$m\ddot{q} + (c_6 + c_n)(q + f) + (\beta_6 + \beta_n)\dot{q} = P_{ст}, \quad (4)$$

или

$$\begin{cases} \ddot{q} + 2n\dot{q} + k_0^2 q; \\ (c_6 + c_n)f = P_{ст}, \end{cases} \quad (5)$$

где $2n$ – коэффициент демпфирования системы;

$k_0 = \sqrt{\frac{c_6 + c_0}{m}}$ – собственная частота консервативной системы. Из второго уравнения системы (5) находим так называемый статический прогиб железнодорожного пути:

$$f_{ст} = \frac{P_{ст}}{mk_0^2}.$$

Первое дифференциальное уравнение системы (5) описывает собственные колебания автономной диссипативной механической системы. Как известно из теории колебаний, они с течением времени затухают, т.е. исчезают. По окончании переходного процесса колесная пара будет катиться по железнодорожному пути спокойно, без колебаний. Это чрезвычайно важное обстоятельство – равноупругий железнодорожный путь не является источником возмущающего воздействия на экипаж.

Применяя алгоритм Лагранжа второго рода и определив потенциальную и кинетическую энергию, а также функцию рассеивания, получим:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k_0^2 q = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение описывает свободные затухающие колебания. Разумеется, здесь исследовать абсолютно нечего. Так как составляется характеристическое уравнение, вычисляются его корни и записывается общее решение однородного дифференциального уравнения (6).

Следовательно, оставаясь в старой парадигме обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, все расчетные параметры находятся достаточно легко, но при этом не учитываются особенности при движении по неравноупругому пути.

Расчет движения подвижного состава по неравноупругому пути

Пусть жесткость железнодорожного пути будет равна (при условии, что движение вдоль пути осуществляется с постоянной скоростью)

$$c_n(t) = c_0 \left[1 - 2\mu \cos\left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t\right) \right], \quad (7)$$

где c_0 – средняя жесткость пути на рельсовом звене; μ – коэффициент параметрического возбуждения (как показывают натурные эксперименты он находится в пределах 0–0,07); l – длина составляющей неравноупругости пути, например, междушпальное расстояние.

Подставим (7) в (4) и найдем:

$$m\ddot{q} + (\beta_6 + \beta_n)\dot{q} + \left(c_n + c_0 \left[1 - 2\mu \cos\left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t\right) \right] \right) \cdot (q + f) = P_{ст}.$$

Полученное уравнение называется параметрическим, оно не обладает регулярными методами интегрирования, отсюда получим:

$$\begin{cases} m\ddot{q} + (\beta_6 + \beta_n)\dot{q} + \left\{ c_6 + c_0 \left[1 - 2\mu \cos\left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t\right) \right] \right\} q = 0; \\ \left\{ c_6 + c_0 \left[1 - 2\mu \cos\left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t\right) \right] \right\} f_{ст} = P_{ст}. \end{cases} \quad (8)$$

Последнее уравнение позволяет нам вычислить так называемый статический прогиб железнодорожного пути:

$$f = \frac{P_{ст}}{mk_0^2} \frac{2}{1 - 2\mu \frac{c_0}{c_6 + c_0} \cos\left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t\right)}.$$

Упростим данное выражение полагая, что $c_0 / (c_6 + c_0) \approx 1$, тогда получим:

$$f = \frac{P_{\text{ст}}}{mk_0^2} \frac{2}{1 - 2\mu \cos(2\Omega t)}. \quad (9)$$

здесь $\Omega = \pi V / (3,6l)$ – частота параметрического возбуждения, рад/сек.

Итак, в действительности так называемый статический прогиб железнодорожного пути является функцией времени. Второй член в (9) является безразмерным и, кроме того, его знаменатель достаточно близок к единице, следовательно, с помощью бинома Ньютона можно записать:

$$\frac{2}{1 - 2\mu \cos(2\Omega t)} = 1 + 2\mu \cos 2\Omega t + (2\mu \cos 2\Omega t)^2 + (2\mu \cos 2\Omega t)^3 \dots \quad (10)$$

Так как величина коэффициента параметрического возмущения мала, т.е. изменяется в пределах 0–0,1, то в правой части формулы (10) можно оставить только два первых члена, поэтому имеем:

$$\frac{2}{1 - 2\mu \cos(2\Omega t)} \approx 1 + 2\mu \cos 2\Omega t.$$

Следовательно, приближенно статический прогиб железнодорожного пути представим так:

$$f(t) = \frac{P_{\text{ст}}}{mk_0^2} [1 + 2\mu \cos(2\Omega t)]$$

Так как $f(t)$ – функция времени, поправим систему дифференциальных уравнений (8) так:

$$\left\{ \begin{aligned} m\ddot{q} + (\beta_6 + \beta_n)\dot{q} + \left\{ c_6 + c_0 \left[1 - 2\mu \cos \left(2 \frac{\pi V}{3,6l} t \right) \right] \right\} q &= \\ &= -m f - (\ddot{\beta} + \dot{\beta}) \dot{f}; \\ f(t) &= \frac{P_{\text{ст}}}{mk_0^2} [1 + 2\mu \cos(2\Omega t)]. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Таким образом, первое уравнение системы (11) описывает относительное движение колесной пары в движущейся системе координат, второе уравнение представляет собой переносное движение колесной пары. Из курса теоретической механики и физики известно, что абсолютное движение твердого тела складывается из переносного и относительного движений [3].

Продифференцируем так называемый статический прогиб железнодорожного пути дважды по времени t и после подстановки результатов в первое уравнение системы (11) и несложных преобразований получим дифференциальное уравнение, которое в дальнейшем будем численно интегрировать:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k_0^2(1 - 2\mu \cos 2\Omega t) = 8\mu\Omega^2 \frac{P_{\text{ст}}}{mk_0^2} \left(\mu \cos 2\Omega t + \frac{\delta}{\lambda} \sin 2\Omega t \right). \quad (12)$$

Приведем (12) к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2; \\ \dot{Y}_2 = 8\mu\lambda^2 \frac{P_{\text{ст}}}{mk_0^2} \left[\mu \cos 2\Omega t + \frac{\delta}{\lambda} \sin 2\Omega t \right] - \\ - k_0^2(1 - 2\mu \cos 2\Omega t)Y_1 - 2nY_2. \end{cases}$$

Численное интегрирование последнего уравнения движения колесной пары экипажа по неравноупругому железнодорожному пути приведены на рис. 2–4.

Следует отметить, что подпрыгивает колесная пара довольно своеобразным образом. Если допустить равенство собственной частоты консервативной системы k_0 частоте параметрического возбуждения Ω , то достаточно быстро

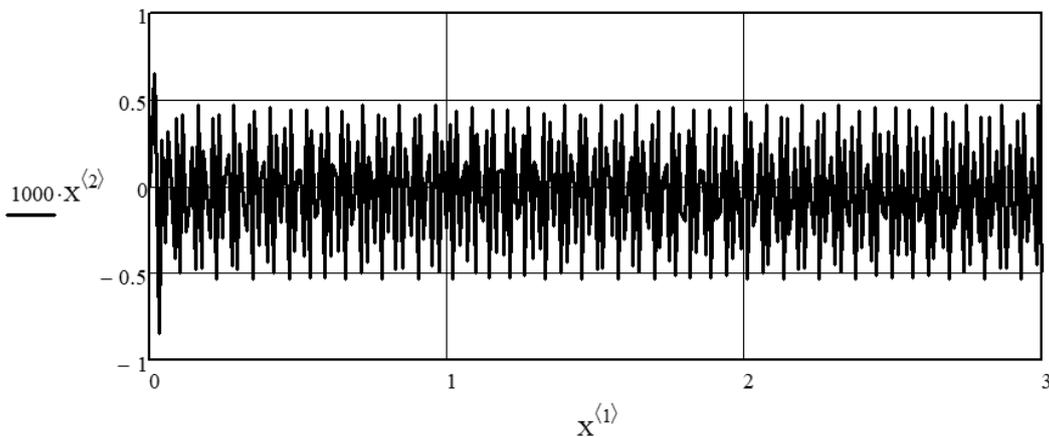


Рис. 2. Подпрыгивание колесной пары в относительном движении, мм
Fig. 2. Wheelset bouncing during relative motion, mm

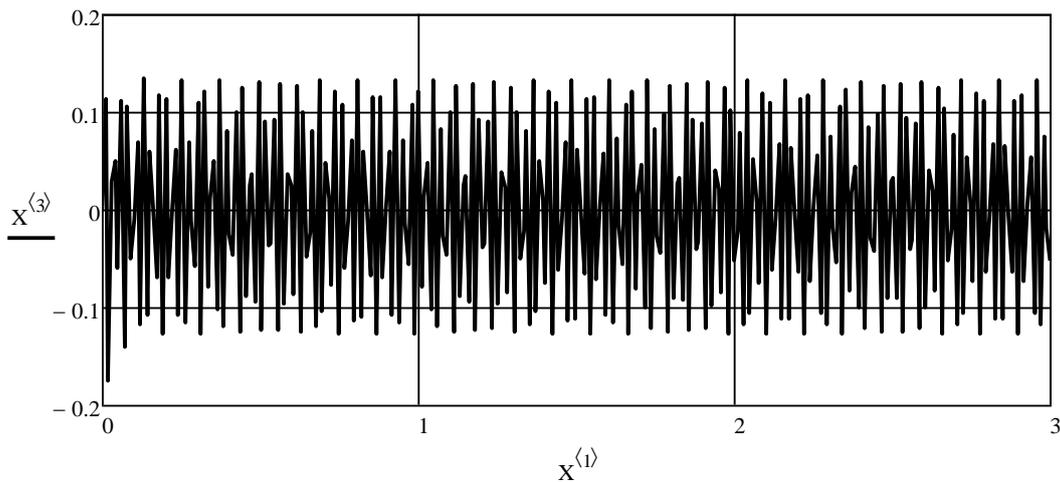


Рис. 3. Скорость подпрыгивания колесной пары в относительном движении, м/с
Fig. 3. The speed of the wheelset bouncing in relative motion, m/s

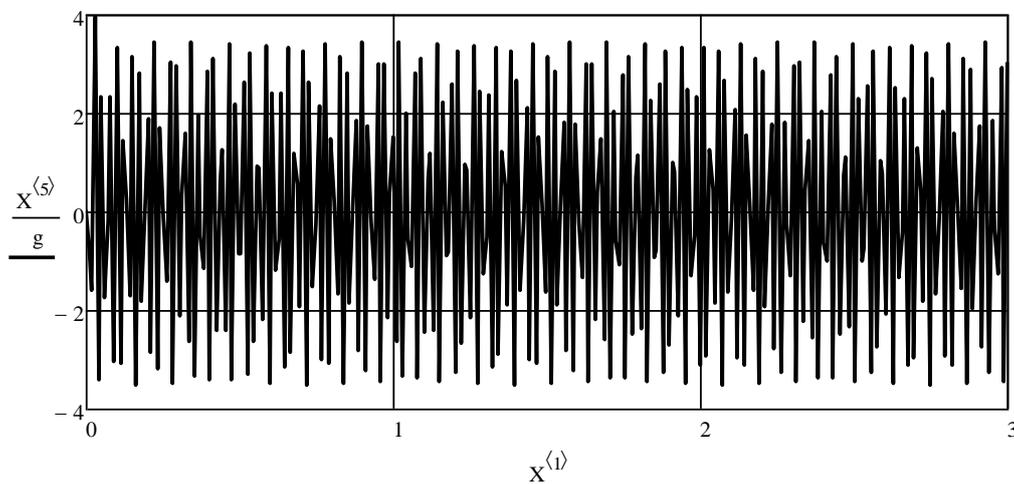


Рис. 4. Ускорение подпрыгивания колесной пары в относительном движении, м/с²
Fig. 4. Acceleration bouncing of the wheelset in relative motion, m/s²

система уходит в бесконечность. Ускорение подпрыгивания достигает порядка $10g$.

Наличие неравноупругости железнодорожного пути вынуждает нас вводить в расчет силы тяжести. Это позволит использовать известный алгоритм уравнений Лагранжа второго рода, в котором обобщенные координаты отсчитываются от положения статического равновесия системы. Однако в данном случае уравнения Лагранжа нужно написать в виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Q_z; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \end{cases} \quad (13)$$

В стандартном алгоритме уравнений Лагранжа второго рода правые части обычно рав-

ны нулю. В данном случае обобщенные силы Q_z и Q_φ , несомненно, отличны от нуля. Обобщенные силы определены с помощью принципа возможных перемещений.

Кинетическая энергия колесной пары, которую примем абсолютно твердым телом, имеющим шесть степеней свободы. Согласно системе уравнений (13) рассмотрено только подпрыгиванием колесной пары z и боковая качка φ . Для решения поставленной задачи число степеней свободы искусственным образом было уменьшено до двух, кинетическая энергия равна:

$$\Gamma = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (14)$$

где m – масса колесной пары; z – подпрыгивание колесной пары; J – момент инерции колес-

ной пары; φ – обобщенная координата, характеризующая боковую качку колесной пары.

Потенциальная энергия равна:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{\delta} - c_{n1}) \cdot (z - s\varphi)^2 + \frac{1}{2}(c_{\delta} - c_{n2}) \cdot (z + s\varphi)^2 - (P + mg)z.$$

где c_{δ} – жесткость буксового подвешивания; c_{n1} , c_{n2} – жесткость железнодорожного пути под левым и правым колесом колесной пары.

При условии размещения упругих и диссипативных элементов в одних и тех же местах, функция рассеивания почти идентична потенциальной функции. Следовательно, имеем:

$$\Phi = \frac{1}{2}(\beta_{\delta} + \beta_n) \cdot (z - s\varphi)^2.$$

Взяв соответствующие частные и прямые производные от кинетической, потенциальной энергии и функции рассеивания и подставляя результаты в уравнения Лагранжа второго рода, находим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)\dot{z} + (2c_{\delta} + c_{n1} + c_{n2})z + (c_{n1} - c_{n2})s\varphi &= P + mg; \\ J\ddot{\varphi} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)s^2\dot{\varphi} + (2c_{\delta} + c_{n1} + c_{n2})s^2\varphi + (c_{n2} - c_{n1})sz &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Система дифференциальных уравнений не является однородной или автономной, так как содержит правую часть, представляющую собой силу статического давления колесной пары на путь. Кроме того, анализ выведенной системы дифференциальных уравнений (15) указывает на тот факт, что разность вертикальной жесткости пути под левым и правым колесами колесной пары экипажа влияет как на подпрыгивание, так и на боковую качку колесной пары.

Если же допустить, что путь является равноупругим, то $c_{n1} = c_{n2} = c_0$, система дифференциальных уравнений (15) примет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)\dot{z} + 2(c_{\delta} + c_0)z = (P + mg); \\ J\ddot{\varphi} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)s^2\dot{\varphi} + 2(c_{\delta} + c_0)s^2\varphi = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Эта система дифференциальных уравнений, во-первых, не является автономной или однородной, так как содержит правую часть отличную от нуля, во-вторых, если отбросить последние слагаемые, характеризующие наличие продольной неравноупругости пути, то получается, что системы дифференциальных уравнений (14) и (15) абсолютно идентичны,

разумеется, этого следовало ожидать.

Примем, что $z = f + q$, где f – постоянная величина равная:

$$f = \frac{P + mg}{2(c_{\delta} + c_0)}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} m\ddot{q} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)\dot{q} + 2(c_{\delta} + c_0)q = 0; \\ J\ddot{\varphi} + 2(\beta_{\delta} + \beta_n)s^2\dot{\varphi} + 2(c_{\delta} + c_0)s^2\varphi = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Данная система обыкновенных дифференциальных уравнений уже является однородной и описывает свободные затухающие (из-за наличия сил вязкого трения) колебания. Более того, каждое из уравнений системы (16) может быть проинтегрировано отдельно, ибо они независимы друг от друга.

Приведем уравнение (16) к нормальной форме Коши, предварительно записав его в векторно-матричном виде:

$$A\vec{\xi} + B\dot{\vec{\xi}} + C\vec{\xi} = 0,$$

где $B = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ – матрица инерционных коэффициентов;

$B = \begin{pmatrix} 2(\beta_{\delta} + \beta_n) & 0 \\ 0 & 2(\beta_{\delta} + \beta_n)s^2 \end{pmatrix}$ – матрица диссипативных коэффициентов;

$C = \begin{pmatrix} 2(c_{\delta} + c_n) & 0 \\ 0 & 2(c_{\delta} + c_0)s^2 \end{pmatrix}$ – матрица жест-

костных коэффициентов; $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} q \\ \varphi \end{pmatrix}$ – вектор обобщенных координат.

Для решения системы уравнений перейдем к нормальной форме Коши $\chi := \sqrt{\text{polyroots}(\rho)}$, по методу представленному в [4]:

$$\vec{y} = G\vec{\xi},$$

где $G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix}$ – матрица Коши, а

иногда ее называют матрицей Хилла (которая уже обладает четвертым порядком); $\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}$.

Найдем корни системы дифференциальных уравнений, вычислив собственные векторы матрицы Хилла:

$$A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 23,7 & 0 \\ 0 & 13,797405 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 5332,49516 & 0 \\ 0 & 3104,413375 \end{pmatrix}.$$

С помощью метода Д.К. Фаддеева определим значения коэффициентов характеристического полинома системы дифференциальных уравнений (16):

$$\rho = \begin{pmatrix} 174255466,25218 \\ -36657,286546 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зная коэффициенты характеристического уравнения, можно с помощью соответствующей стандартной функции *polyroots(...)* вычислить его корни и тем самым оценить собственные частоты

$$\chi = \begin{pmatrix} 74,920977 \\ 176,193455 \end{pmatrix}.$$

Так, система является диссипативной. Находим комплексные корни характеристического уравнения:

$$\omega := \text{eigenvals}(G) = \begin{pmatrix} -12,473684 & +73,8753i \\ -12,473684 & -73,8753i \\ -50 & +168,95009i \\ -50 & -168,95009i \end{pmatrix}$$

отметим, что собственная частота подпрыгивания колесной пары равна 73,8753 рад/сек, а боковая качка – 168,95 рад/сек. Коэффициенты относительного вязкого трения составляют 0,169 для подпрыгивания и 0,295 для боковой

качки колесной пары. Таким образом, можно полагать, что рассматриваемые колебания колесной пары экипажа демпфированы вполне нормально.

Произведем интегральную оценку жесткости железнодорожного пути под колесной парой подвижного состава (рис. 5).

Неизвестно изменение жесткости железнодорожного пути под левым и правым колесами колесной пары экипажа, движущегося по неравноупругому пути в продольном направлении. За многие годы экспериментальных исследований вертикальной жесткости пути никто и не изучал отдельно результаты для левого и правого колес. Для определения жесткости под левым и правым колесом колесной пары введем новую переменную ε , которая будет характеризовать сдвиг кривых вертикальных жесткостей под колесами. На рис. 6 показано изменение вертикальных жесткостей некоторого железнодорожного пути под левым и правым колесами колесной пары.

Анализируя представленные данные на рис. 6 при $\varepsilon = 0,01$, можно сделать вывод, что вертикальные жесткости под левым и правым колесами колесной пары отличаются не очень сильно, и величина этого отличия будет зависеть от величины ε .

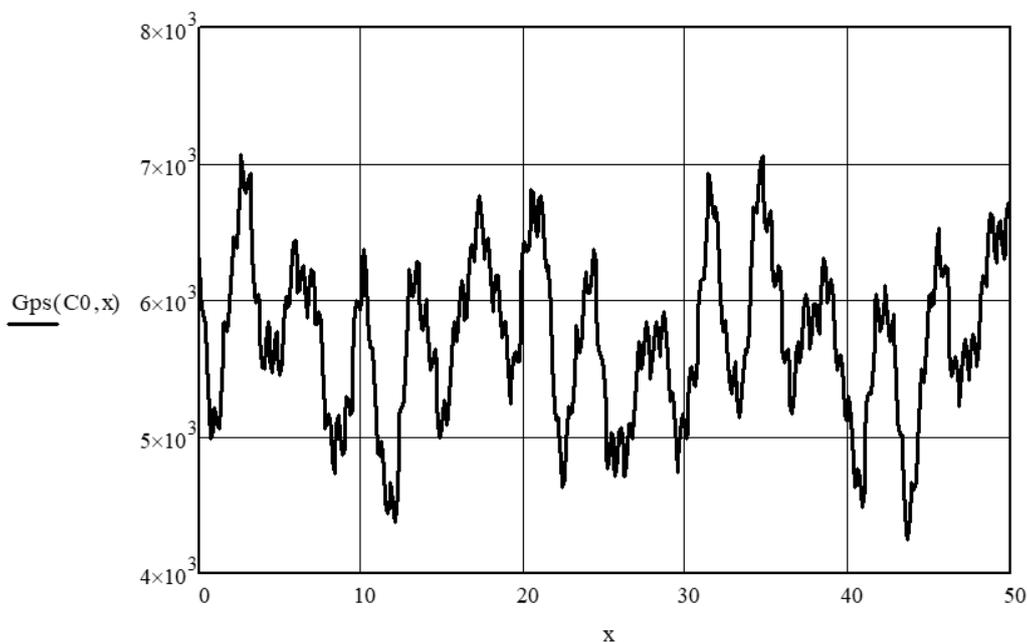


Рис. 5. Интегральная оценка жесткости железнодорожного пути под колесной парой подвижного состава, тс/м

Fig. 5. Integral estimation of railway track stiffness under a rolling stock wheelset, ts/m

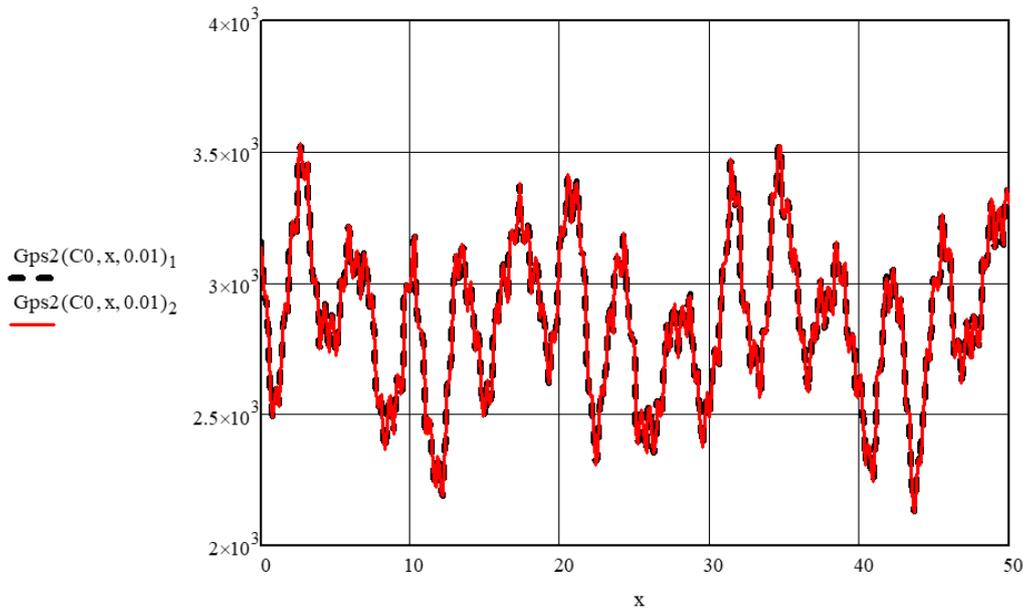


Рис. 6. Жесткость пути под левым и правым колесами колесной пары, тс/м

Fig. 6. Rigidity of the railway track under the left and right wheels of the wheelset, ts/m

На рис. 7 представлена оценка прираще- ния жесткости под левым и правым колесами, разница жесткостей под колесами колесной пары отличается всего на 4 %, что может оказать существенное значение при определении дина- мических качеств как железнодорожного пути, так и подвижного состава.

Ниже приведены результаты численного интегрирования уравнения движения колесной пары по неравноупругому пути (рис. 8–11). Расчеты выполнялись с использованием чис-

ленного метода Рунге – Кутты с постоянным шагом интегрирования для $\varepsilon = 0,04$. Расчеты произведены для скоростей движения 40, 60, 80 и 100 км/ч.

На рис. 12 приведена интегральная оцен- ка динамической добавки давления колесной пары экипажа на путь для Сибирского региона. Из этого рисунка следует, что динамическая добавка давления не превышает 4 тс и с увели- чением скорости движения возрастает.

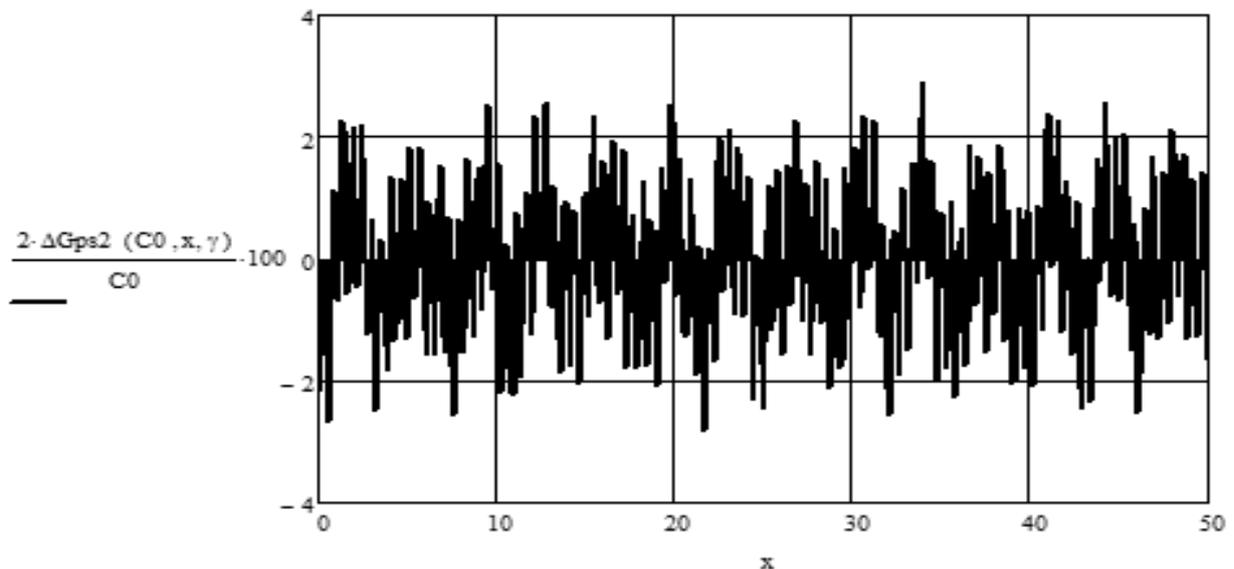


Рис. 7. Оценка приращения жесткости пути к средней жесткости одной нити пути, %

Fig. 7. Estimation of the increment of the stiffness of the track to the average stiffness of one thread of the track, %

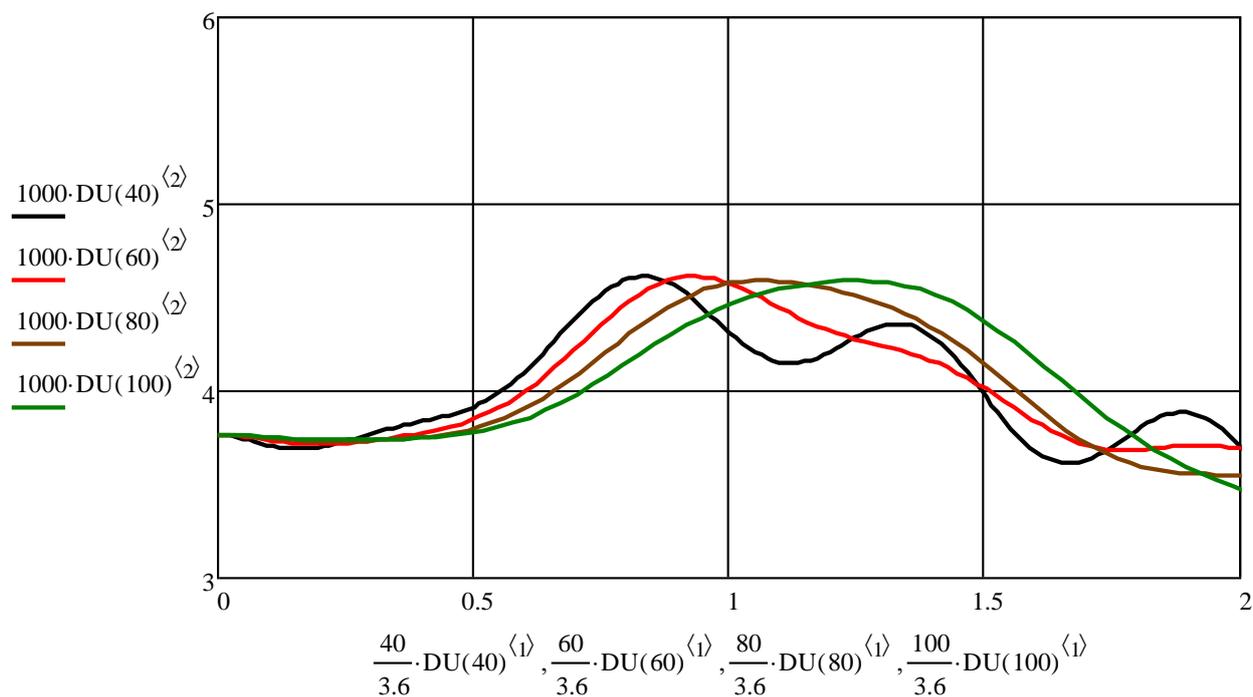


Рис. 8. Подпрыгивание колесной пары при движении по неравноупругому пути в Сибирском регионе, мм
Fig. 8. Bouncing of the wheelset when moving along the non-uniformly elastic track in the Siberian region, mm

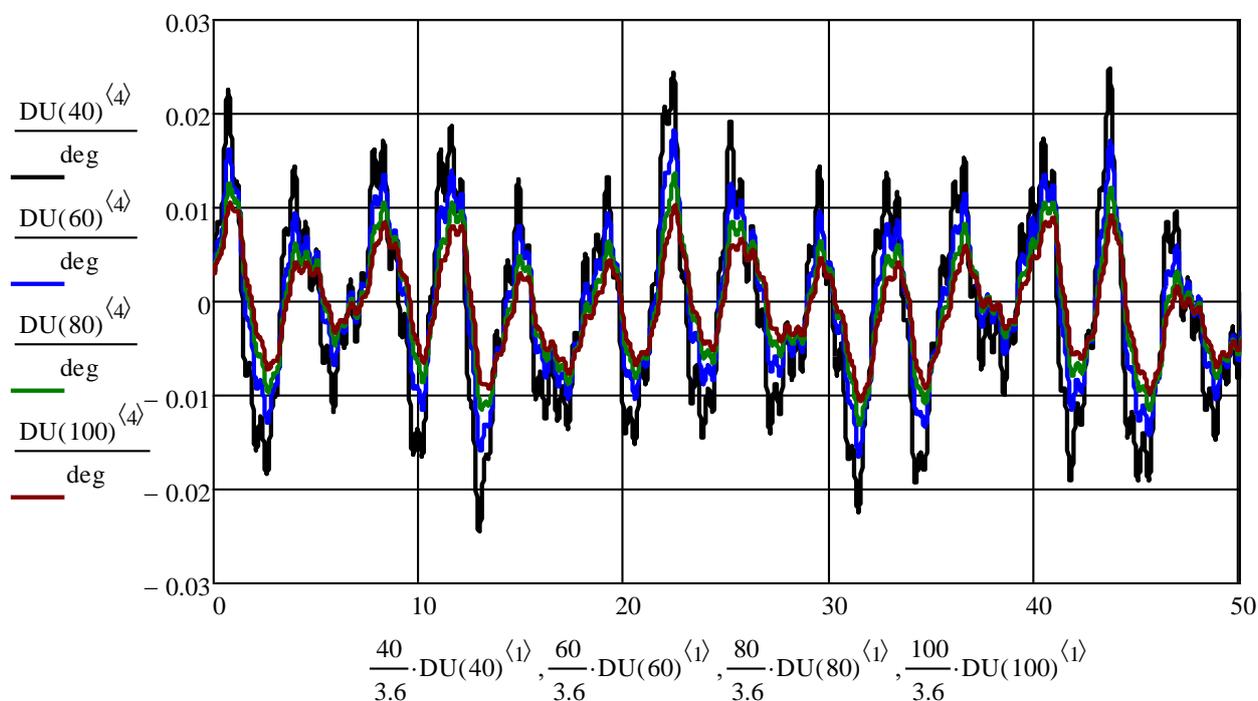


Рис. 9. Боковая качка колесной пары экипажа при движении по неравноупругому пути в Сибирском регионе
Fig. 9. Lateral rolling of a rolling stock wheelset when moving along a non-uniformly elastic track in the Siberian region

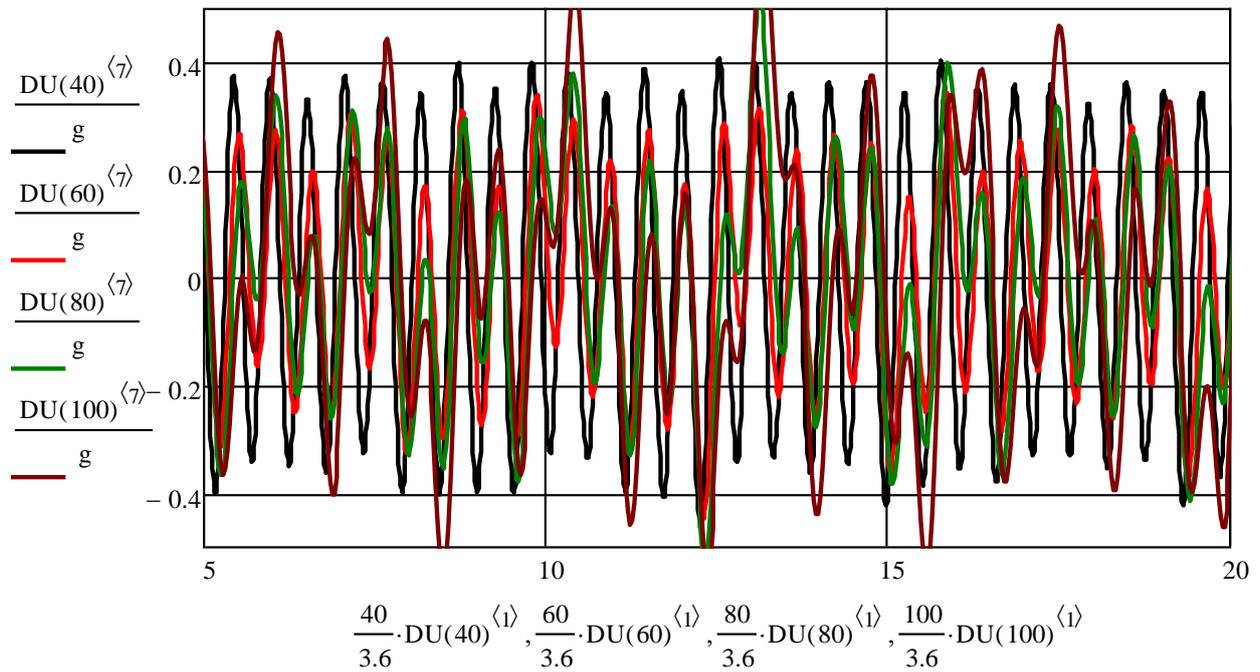


Рис. 10. Ускорение подпрыгивания колесной пары экипажа при движении по неравноупругому пути в Сибирском регионе, в долях g
Fig. 10. Acceleration of the bouncing of a rolling stock wheelset when moving along an unevenly elastic track in the Siberian region, in fractions of g

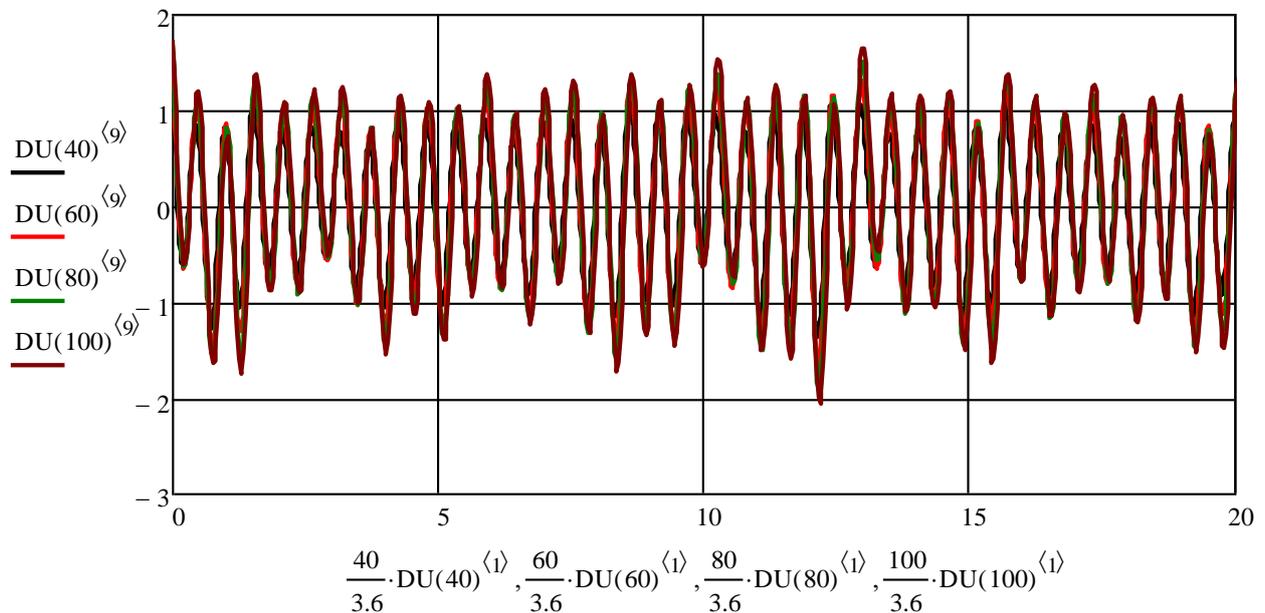


Рис. 11. Ускорение боковой качки колесной пары экипажа, rad/s^2
Fig. 11. Acceleration of the lateral pitching of the wheelset of the crew, rad/s^2

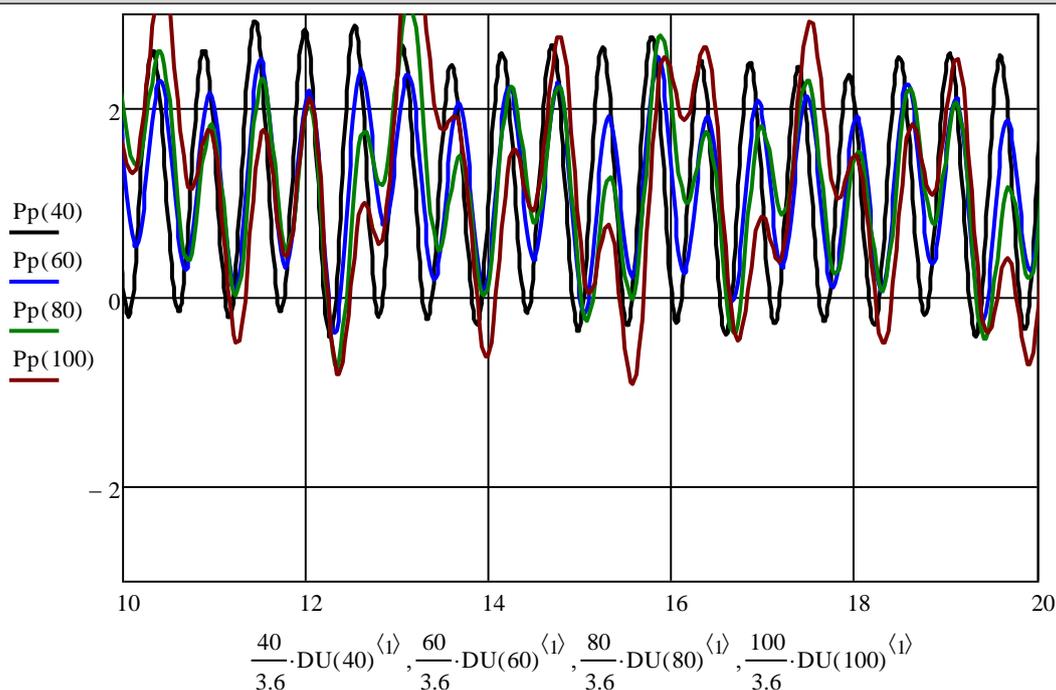


Рис. 12. Интегральная оценка динамической добавки давления колесной пары экипажа на железнодорожный путь, тс

Fig. 12. Integral estimation of the dynamic component of a rolling stock wheelset pressure upon a railway track, ts

В завершении нашего исследования остановимся на определении областей динамической неустойчивости, что вполне естественно для параметрических систем. Этих областей множество [4–9], но счетное, при этом важное практическое значение имеют только главные области параметрического резонанса [4]. Для нахождения главной зоны динамической неустойчивости подпрыгивания колесной пары экипажа имеем приближенное, однако явное выражение для скорости движения поезда:

$$V_{1,2} = \frac{3,6l_{\text{шп}}k_0}{\pi} \left[1 - 2\delta \pm \sqrt{\mu^2 - 4\delta^2(1 - \delta^2)} \right],$$

здесь k_0 – собственная частота подпрыгивания колесной пары железнодорожного экипажа; $n = (\beta_6 + \beta_n) / 2m$ – коэффициент демпфирования колебаний подпрыгивания колесной пары; $\delta = n / k_0$ – относительный коэффициент вязкого трения буксового подвешивания и пути; μ – коэффициент параметрического возбуждения (или коэффициент изменения жесткости пути под шпалой и в междушпальном пролете, по данным профессоров Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта М.Ф. Вериго и А.Я. Когана они отличаются приблизительно на 30 % [10], а в пересчете на коэффициент усиления μ имеем

около 0,13, в опытах же была зарегистрирована порядка 0,1); $l_{\text{шп}} = 0,543$ м – междушпальное расстояние для эпюры шпал 1 840 шт. на 1 км.

На рис. 13 и 14 показаны зоны динамической неустойчивости колебаний подпрыгивания и боковой качки колесной пары экипажа (сплошные линии – для консервативного случая, а пунктирные – для диссипативного случая).

Заключение

Приведенные формулы получены при учете в спектральной плотности лишь одной скрытой периодичности, имеющей длину междушпального промежутка. Из них следуют следующие утверждения:

1. Области динамической неустойчивости для подпрыгивания колесной пары и боковой качки накладываются на зону эксплуатационных скоростей современных поездов.

2. Наличие вязких диссипативных сил в системе «экипаж – железнодорожный путь» не может полностью исключить параметрические колебания подвижного состава, а создает лишь пороговые энергетические условия 0,236 и 0,368, превышение которых приводит к бесконечному росту амплитуд колебаний. Другими словами, если коэффициент параметрического усиления μ будет больше указанных значений,

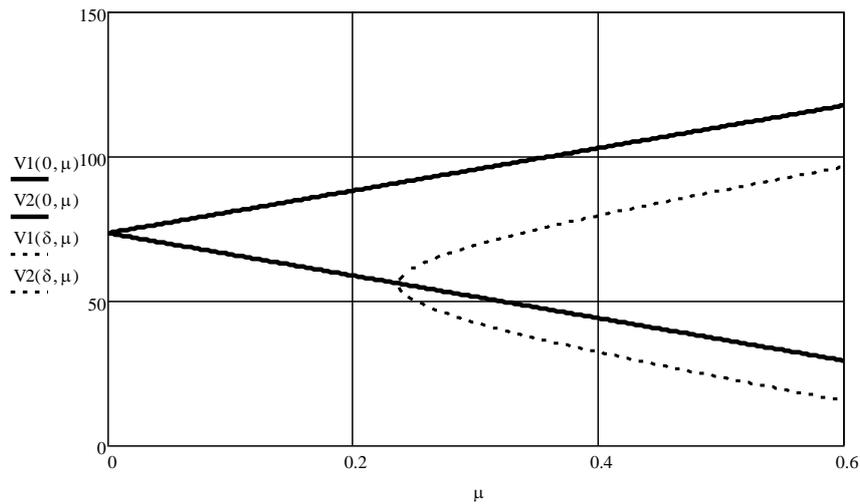


Рис. 13. Область параметрического резонанса подпрыгивания колесной пары экипажа, км/ч
Fig. 13. The range of parametric resonance of the vehicle wheelset bouncing, km/h

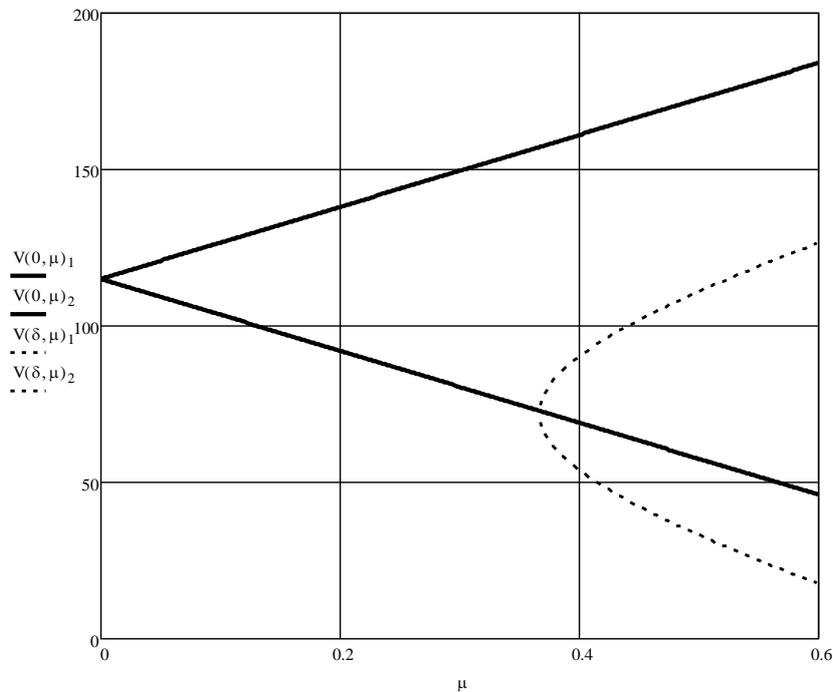


Рис. 14. Область параметрического резонанса боковой качки колесной пары экипажа, км/ч
Fig. 14. The range of parametric resonance of the lateral pitching of the vehicle wheelset, km/h

то амплитуды колебаний уйдут в бесконечность, т.е. система разрушится.

3. Исследованы зоны простых параметрических резонансов, развивающихся в районе критических частот, совпадающих с собственными частотами консервативной механической системы. Следует подчеркнуть, что изменяется само понятие резонанса, подразумевающее в классической трактовке совпадение собственных частот системы с какой-либо частотой возмущающих сил.

4. Из теории параметрических систем известно, что в диссипативных случаях силы вязкого трения могут играть отрицательную роль, расширяя с ростом трения области комбинационных резонансов многостепенных моделей.

5. Поставленная в работе задача существенно образом усложнится, если увеличить число степеней свободы железнодорожного экипажа и принять во внимание, что жесткость железнодорожного пути является случайной

величиной. Но развиваться в этом направлении транспортная механика будет вынуждена.

Первые исследования теоретические и натурные неравноупругости железнодорожного пути в зоне стыка выполнил в начале 60-х гг. прошлого века заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор, бывший заведующий кафедрой взаимодействия подвижного состава и пути и динамики локомотивов Омского института инженеров железнодорожного транспорта М.П. Пахомов [10, 11]. График изменения жесткости пути, полученный им, в указанном районе вошел практически во все учебники, посвященные динамике локомотивов и вагонов [12]. В то время еще физически не существовало знаменитого трактата членкорреспондента АН СССР В.В. Болотина [5] о динамической устойчивости упругих систем, в котором разъяснен вопрос о важности пара-

метрических колебаний в физических системах. Далее сотрудники ДИИТ под руководством доктора технических наук, профессора М.А. Фришмана [13–15] доказали экспериментально неравноупругость железнодорожного пути по его протяженности. Некоторые теоретические результаты были найдены сотрудниками МИИТ, кандидатом технических наук, профессором Г.П. Бурчаком и доктором технических наук, профессором Н.А. Панькиным [16–18]. Сложность данного вопроса состоит в том, что параметрические системы не обладают регулярными методами их интегрирования, и их точные решения никому не известны, а, кроме того, ученые-железнодорожники в основной своей массе являются так называемыми технарями, получившими высшее образование в технических вузах, в которых изучались лишь обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Список литературы

1. Медель В.Б. Взаимодействие электровоза и пути. М. : Трансжелдориздат, 1956. 335 с.
2. Медель В.Б. Подвижной состав электрических железных дорог. Конструкция и динамика. М. : Транспорт, 1974. 232 с.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика системы, аналитическая механика, элементы теории потенциала, механика сплошной среды, специальной и общей теории относительности. М. : Наука, 1977. 543 с.
4. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. Т. 1: колебания линейных систем. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
5. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М. : ГИТТЛ, 1956. 600 с.
6. Шмидт Г. Параметрические колебания. М. : Мир, 1978. 336 с.
7. Каннингхэм У.Дж. Введение в теорию нелинейных систем. М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1962. 456 с.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51. № 1. С. 99–128.
9. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. М. : Транспорт, 1986. 558 с.
10. Пахомов М.П., Нехаев В.А. К вопросу о параметрических колебаниях подвижного состава // Вопросы улучшения тяговых, энергетических и эксплуатационных свойств электровозов : сб. ст. Свердловск, 1978. № 59. С. 91–96.
11. Пахомов М.П., Галиев И.И., Нехаев В.А. Математическая модель колебаний тележки локомотива при движении по неравноупругому вдоль рельсового звена пути // Взаимодействие подвижного состава и пути и динамика локомотивов дорог Сибири, Дальнего Востока и Крайнего Севера : межвуз. тем. сб. науч. тр. Омск, 1981. С. 9–15.
12. Механическая часть тягового подвижного состава / И.В. Бирюков, А.Н. Савоськин, Г.П. Бурчак и др. М. : Транспорт, 1992. 440 с.
13. Фришман М.А., Леванков И.С. Исследование особенностей изменения вертикальной жесткости пути по его длине // Исследование взаимодействия пути и подвижного состава : мезвуз. сб. науч. тр. Днепропетровск, 1972. № 138. С. 48–57.
14. Фришман М.А., Леванков И.С. Об особенностях изменения вертикальной жесткости вдоль пути с тяжелым типом верхнего строения // Науч. тр. ДИИТа. 1973. № 142. С. 3–10.
15. Фришман М.А., Липовский Р.С., Данович В.Д. Экспериментальное определение частотных характеристик рельсошпальной решетки // Исследование взаимодействия пути и подвижного состава : мезвуз. сб. науч. тр. Днепропетровск, 1978. № 198/20. С. 3–11.
16. Бурчак Г.П. Колебания неподрессоренной массы на неравноупругом пути с неровностью // Тр. Акад. коммун. хоз-ва им. К.Д. Панфилова. 1980. Вып. 175. С. 84–98.
17. Панькин Н.А., Стесин И.М., Ценов В.П. Колебательные движения экипажей при параметрическом возмущении // Вестник ВНИИЖТ. 1978. № 1. С. 27–30.
18. Панькин Н.А., Стесин И.М., Бельняк Ю.Г. Вертикальные колебания экипажа, возникающие при движении по неравноупругому пути // Тр. МИИТ. Прикладная математика и задачи железнодорожного транспорта : межвуз. сб. М., 1979. № 640. С. 24–32.

References

1. Medel' V.B. Vzaimodeistvie elektrovoza i puti [Interaction of an electric locomotive and a track]. Moscow: Transzheldorizdat Publ., 1956. 335 p.
2. Medel' V.B. Podvizhnoi sostav elektricheskikh zheleznikh dorog. Konstruktsiya i dinamika [Rolling stock of electric

railways. Design and dynamics]. Moscow: Transport Publ., 1974. 232 p.

3. Kil'chevskii N.A. Kurs teoreticheskoi mekhaniki. T 2. Dinamika sistemy, analiticheskaya mekhanika, elementy teorii potentsiala, mekhaniki splushnoi sredy, spetsial'noi i obshchei teorii otnositel'nosti [Course of theoretical mechanics. Volume 2. System dynamics, analytical mechanics, elements of potential theory, continuum mechanics, special and general relativity]. Moscow: Nauka Publ, 1977. 543 p.

4. Vibratsii v tehnikе (spravochnik v 6 tomakh). Tom 1. Kolebaniya lineinykh sistem [Vibrations in Engineering (A handbook in 6 vol.). Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1978. 352 p.

5. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow: GITTL Publ., 1956. 600 p.

6. Schmidt G. Parametricheskie kolebaniya [Parametric oscillations]. Moscow: Mir Publ., 1978. 336 p.

7. Cunningham W.J. Vvedenie v teoriyu nelineinykh sistem [Introduction to nonlinear analysis]. Moscow – Leningrad: Gosenergoizdat Publ., 1962. 456 p.

8. Filippov A.F. Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu [Differential equations with a discontinuous right-hand side]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1960, vol. 51, no. 1, pp. 99 – 128.

9. Verigo M.F., Kogan A.Ya. Vzaimodeistvie puti i podvizhnogo sostava [Track and rolling stock interaction]. Moscow: Transport Publ., 1986. 558 p.

10. Pakhomov M.P., Nekhaev V.A. K voprosu o parametricheskikh kolebaniyakh podvizhnogo sostava [On the issue of parametric oscillations of the rolling stock]. *Sbornik statei «Voprosy uluchsheniya tyagovykh, energeticheskikh i ekspluatatsionnykh svoystv elektrovozov»* [Proceedings «Issues of improving the traction, energy and operational properties of electric locomotives»]. Sverdlovsk, 1978, no. 59, pp. 91–96.

11. Pakhomov M.P., Galiev I.I., Nekhaev V.A. Matematicheskaya model kolebaniy telezhki lokomotiva pri dvizhenii po neravnouprugomu vdol' rel'sovogo zvena puti [Mathematical model of oscillations of a locomotive bogie when moving along an unequally elastic track along a rail link]. *Mezhvuzovskii tematicheskii sbornik nauchnykh trudov «Vzaimodeistvie podvijnogo sostava i puti i dinamika lokomotivov dorog Sibiri, Dalnego Vostoka i Krainego Severa»* [Interuniversity topics proceedings «Interaction of rolling stock and tracks and dynamics of locomotives on the roads of Siberia, the Far East and the Far North»]. Omsk, 1981, pp. 9–15.

12. Biryukov I.V., Savos'kin A.N., Burchak G.P., Serdobintsev E.V., L'vov N.V., Korotenko M.L., Rybnikov E.K., Derkach B.A. Mekhanicheskaya chast' tyagovogo podvizhnogo sostava [Mechanical part of traction rolling stock]. Moscow: Transport Publ., 1992. 440 p.

13. Frishman M.A., Levankov I.S. Issledovanie osobennostei izmeneniya vertikal'noi zhestkosti puti po ego dline [Research of the features of the change in the vertical stiffness of the path along its length]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1972, no. 138, pp. 48–57.

14. Frishman M.A., Levankov I.S. Ob osobennostyakh izmeneniya vertikal'noi zhestkosti vdol' puti s tyazhelym tipom verkhnego stroeniya [About the peculiarities of the change in vertical stiffness along the path with a heavy type of upper structure]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1973, no. 142, pp. 3–10.

15. Frishman M.A., Lipovskii R.S., Danovich V.D. Eksperimental'noe opredelenie chastotnykh kharakteristik rel'soshpal'noi reshetki [Experimental determination of the frequency characteristics of the rail-sleeper grating]. *Nauchnye trudy Dnepropetrovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Dnepropetrovsk institute of engineers of transport], 1978, no. 198/20, pp. 3–11.

16. Burchak G.P. Kolebaniya nepodressorennoi massy na neravnouprugomu puti s nerovnostyu [Oscillations of the unsprung mass on an unequal elastic track with unevenness]. *Nauchnye trudy Akademii kommunisticheskogo khozyaistva im. K.D. Panfilova* [Scientific proceedings of Academy of communistic facilities named after K.D. Panfilov], 1980, no. 175, pp. 84–98.

17. Pan'kin N.A., Stesin I.M., Tsenov V.P. Kolebatel'nye dvizheniya ekipazhei pri parametricheskom vozmushchenii [Oscillatory motions of vehicles under parametric perturbation]. *Vestnik Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta zheleznodorozhnogo transporta* [Bulletin of All-Union scientific-research institute of railway transport], 1978, no. 1, pp. 27–30.

18. Pan'kin N.A., Stesin I.M., Belen'kaya Yu.G. Vertikal'nye kolebaniya ekipazha, voznikayushchie pri dvizhenii po neravnouprugomu puti [Vertical oscillations of the vehicle, arising when moving along an unequal-elastic path]. *Nauchnye trudy Moskovskogo instituta inzhenerov transporta* [Scientific proceedings of Moscow institute of engineers of transport], 1979, no. 640, pp. 24–32.

Информация об авторах

Нехаев Виктор Алексеевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, Омский государственный университет путей сообщения, г. Омск; e-mail: nehaevva@rambler.ru.

Леоненко Елена Геннадьевна, преподаватель электромеханического отделения, Красноярский институт железнодорожного транспорта – филиал Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Красноярск; e-mail: leonenko-eg@mail.ru.

Information about the authors

Victor A. Nekhaev, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, Omsk State Transport University, Omsk; e-mail: nehaevva@rambler.ru.

Elena G. Leonenko, Lecturer of the Electromechanical Department, Krasnoyarsk Rail Transport Institute – Branch of the Irkutsk State Transport University, Krasnoyarsk; e-mail: leonenko-eg@mail.ru.