

## Механическая мощность при гармонических воздействиях

В. Д. Павлов✉

Владимирский электромеханический завод, г. Владимир, Российская Федерация

✉ pavlov.val.75@mail.ru

### Резюме

Цель исследования состоит в детализации видов механической мощности при гармонических колебаниях. В силу необратимости тепловой энергии ее производная принимает только положительные значения. Вместе с тем производные могут быть взяты как от потенциальной, так и от кинетической энергии. Однако наиболее интересный случай представляют гармонические колебания, при которых производные (мгновенные мощности) необходимо являются знакопеременными функциями, что принципиально отличает их от тепловой мощности. Аналогом кинетической энергии в электротехнике является энергия магнитного поля катушки индуктивности, аналогом потенциальной энергии – энергия электрического поля конденсатора, а механическую тепловую энергию заменяет тепловая же энергия, рассеиваемая резистором. Показано, что при механических колебаниях развивается не только знакоположительная тепловая мощность, но и знакопеременные реактивные мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий. Под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной – амплитудное значение. Полная механическая мощность, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой – равна произведению действующих значений гармонических величин. Особенностью комплексного представления является то, что при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть сопряженным. Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях – обобщение соответствующих понятий из электротехники, что является проявлением электромеханического дуализма. Поскольку приводы машин и механизмов преимущественно электромеханические, механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети, ухудшая качество электроэнергии. В этой связи учет механической реактивной мощности имеет немаловажное значение.

### Ключевые слова

механическая мощность, кинетическая энергия, потенциальная энергия, комплексное представление, векторное представление

### Для цитирования

Павлов В. Д. Механическая мощность при гармонических воздействиях / В. Д. Павлов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 1 (73). – С. 30–38. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.1(73).30-38

### Информация о статье

поступила в редакцию: 18.02.2022 г.; поступила после рецензирования: 22.03.2022 г.; принята к публикации: 23.03.2022 г.

## Mechanical power under harmonic influences

V. D. Pavlov✉

Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, the Russian Federation

✉ pavlov.val.75@mail.ru

### Abstract

The purpose of the study is to detail the types of mechanical power under harmonic oscillations. Due to the irreversibility of thermal energy, its derivative takes only positive values. At the same time, derivatives can be taken from both potential and kinetic energy. Wherein, the most interesting case is presented by harmonic oscillations, with the derivatives (instantaneous powers) necessarily being sign-changing functions, which fundamentally distinguishes them from thermal power. An analogue of kinetic energy in electrical engineering is the energy of the magnetic field of an inductor, an analogue of potential energy is the energy of the electric field of a capacitor, and an analogue of mechanical thermal energy is the thermal energy dissipated by a resistor. It is shown that during mechanical vibrations, not only a sign-positive thermal power develops, but sign-alternating reactive powers, characterizing the reversibility of the kinetic and potential energies do as well. Active power is understood as the average value of instantaneous half period power, while reactive power is an amplitude value. The total mechanical power, on the one hand, is described by the Pythagorean formula, and on the other hand, it is equal to the product of the effective values of the harmonic quantities. The peculiarity of the complex representation is that when calculating the total power, one of the multiplied vectors must be conjugate. The concept of mechanical reactive, active and apparent power is a generalization of the corresponding concepts from electrical engineering, which is a manifestation of electro-mechanical dualism. Since the drives of machines and mechanisms are predominantly electromechanical, the mechanical reactive power is transformed into the electrical reactive power of the network, degrading the quality of electricity. In this regard, the consideration of mechanical reactive power is of no small importance.

**Keywords**

mechanical power, kinetic energy, potential energy, complex representation, vector representation

**For citation**

Pavlov V. D. Mekhanicheskaya moshchnost' pri garmonicheskikh vozdeystviyakh [Mechanical power under harmonic influences]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, No. 1 (73), pp. 30–38. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.1(73).30-38

**Article info**

Received: 18.02.2022; revised: 22.03.2022; accepted: 23.03.2022.

**Введение**

Механическая энергия бывает обратимой – потенциальная и кинетическая, а также необратимой, например, тепловая при трении. В качестве механической мощности принято считать временную производную от последней. В силу необратимости тепловой энергии ее производная принимает только положительные значения.

Вместе с тем, производные могут быть взяты как от потенциальной, так и от кинетической энергии. Наиболее интересный случай представляют гармонические колебания [1–4], при которых производные (мгновенные мощности) являются знакопеременными функциями, что принципиально отличает их от тепловой мощности.

Аналогом кинетической энергии в электротехнике является энергия магнитного поля катушки индуктивности, аналогом потенциальной энергии – энергия электрического поля конденсатора, а аналогом механической тепловой энергии – тепловая же энергия, рассеиваемая резистором.

Цель исследования состоит в детализации видов механической мощности при гармонических колебаниях.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [5–10]. Поскольку приводы машин и механизмов являются преимущественно электромеханическими, механическая реактивная мощность трансформируется в электрическую реактивную мощность сети [11–13], ухудшая качество электроэнергии [14–17]. В этой связи учет механической реактивной мощности имеет немаловажное значение.

**Методика**

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электромеханических аналогий:

–  $v$  (скорость)  $\rightarrow I$  (ток);  
 –  $F$  (сила)  $\rightarrow U$  (напряжение);  
 –  $m$  (масса)  $\rightarrow L$  (индуктивность);  
 –  $k$  (коэффициент упругости)  $\rightarrow 1/C$  ( $C$  – емкость);  
 –  $r$  (коэффициент вязкого сопротивления)  $\rightarrow R$  (сопротивление).

В 1919 г. Вебстер ввел в механику заимствованное из электротехники понятие о механических реактансах, являющихся аналогами электрических реактивных сопротивлений:

–  $\omega m$  (инертный реактанс)  $\rightarrow \omega L$  (индуктивное сопротивление);  
 –  $k/\omega$  (упругий реактанс)  $\rightarrow 1/(\omega C)$  (емкостное сопротивление).

В соответствии с представленной системой аналогий формула закона Ома для участка электрической цепи  $U = IZ$ ,

где  $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$  – полное сопротивление, имеет дуально механическое выражение:

$$F = Vz,$$

где  $z$  – полное механическое сопротивление или механический импеданс (impedance) –

$z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}$  (кг·с<sup>-1</sup>), как в силу дуального соответствия, так и потому, что в его состав входят инертный и упругий реактансы.

Механический реактанс (reactance):

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

При  $x = 0$  получается известная формула –  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Имеет место резонанс сил, если при этом  $r = 0$ , то и  $z = 0$ . Физический смысл этого состоит в том, что система не оказывает сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию [18].

В основе дальнейшего рассмотрения лежит электромеханический дуализм или изоморфность в математическом смысле электрических и механических явлений и процессов.

Мгновенная механическая мощность, равная производной по времени от кинетической энергии инертного тела, вычисляется как:

$$q_m = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = mv \frac{dv}{dt} = mav = f_a v.$$

Другими словами, мгновенная механическая мощность равна произведению мгновенных значений силы и скорости, что и будет использовано в дальнейшем.

### Мощность, развиваемая при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела

Движение тела описывается известным выражением:

$$x = l \sin \omega t.$$

Соответственно, мгновенная скорость определяется как:

$$v = \dot{x} = \omega l \cos \omega t = v_m \cos \omega t.$$

В электротехнике установлено, что для гармонической величины действующее значение меньше амплитудного в  $\sqrt{2}$ :

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

В соответствии с основной аксиомой механики, известной как второй закон Ньютона, формула для силы имеет вид:

$$f_a = m\ddot{x} = -m\omega^2 l \sin \omega t \quad (2)$$

Формула для силы трения, пропорциональной скорости:

$$f_\mu = \mu \dot{x} = \mu \omega l \cos \omega t. \quad (3)$$

Результирующая сила равна сумме сил в соответствии с формулами (2) и (3):

$$f = f_a + f_\mu = -m\omega^2 l \sin \omega t + \mu \omega l \cos \omega t = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cdot$$

$$\left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \cos \omega t - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \sin \omega t \right).$$

Для удобства дальнейших преобразований можно обозначить:

$$\varphi = \arctg \frac{m\omega}{\mu}.$$

С учетом этого выражение для результирующей силы примет вид:

$$f = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} (\cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t) = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cdot \cos(\varphi + \omega t).$$

Очевидно, что амплитуда мгновенного значения силы находится как

$$F_m = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы по аналогии с выражением для скорости (1) равно:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Мгновенная результирующая мощность при вынужденных гармонических колебаниях инертного тела будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} s &= fv = \omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cos(\omega t + \varphi) \omega l \cos \omega t = \\ &= 0,5 \omega^2 l^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] = \\ &= FV [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] = \\ &= FV (\cos \varphi + \cos 2\omega t \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ &= FV \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) - FV \sin \varphi (1 + \sin 2\omega t) = \\ &= p + q_i. \end{aligned} \quad (5)$$

В электротехнике есть выражение для мгновенной электрической мощности, аналогичное (5) с заменами:

$$F \rightarrow U, V \rightarrow I.$$

В соответствии с ним определяют активную электрическую мощность:

$$P = UI \cos \varphi,$$

поэтому активную (тепловую) механическую мощность тоже следует определять как

$$P = FV \cos \varphi. \quad (6)$$

Очевидно, что гармонические сила и скорость совершают колебания со сдвигом фаз, равным  $\varphi$ . В электроэнергетике величина  $\cos \varphi$  играет ключевую роль для определения качества электроэнергии.

Из приведенной формулы определяют реактивную электрическую мощность:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Поэтому реактивную (инерционную) механическую мощность тоже следует определять как:

$$Q_i = FV \sin \varphi. \quad (7)$$

Из формулы (5) следует, что под активной мощностью понимается среднее за полпериода значение мгновенной мощности, а под реактивной – амплитудное значение. В электротехнике все обстоит аналогичным образом.

Другим обобщением из электротехники является полная механическая мощность:

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \quad (8)$$

Она примечательна тем, что, с одной стороны, описывается формулой Пифагора, а с другой – равна произведению действующих значений гармонических величин.

Имея в виду (1), (5) и (8):

$$Q_i = FV \sin \varphi = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \frac{ml^2 \omega^3}{2}. \quad (9)$$

При этом:

$$f_a v = -ml\omega^2 \sin \omega t \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = -0.5ml^2 \omega^3 \sin 2\omega t = -F_a V \sin 2\omega t = -Q_i \sin 2\omega t.$$

Это соответствует выражениям (5) и (9).

Имея в виду (1), (4) и (6):

$$P = FV \cos \varphi = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}. \quad (10)$$

При этом:

$$f_\mu v = \mu \omega l \cos \omega t \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = 0.5\mu \omega^2 l^2 \cdot (1 + \cos 2\omega t) = F_\mu V \cdot (1 + \cos 2\omega t) = P \cdot (1 + \cos 2\omega t).$$

Это соответствует выражениям (5) и (10).

Имея в виду (8), (9) и (10):

$$S = FV = \frac{\omega l \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} = \frac{\omega^2 l^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{2}.$$

### Мощность, развиваемая при упругих деформациях

Выражение для силы имеет вид:

$$f_k = kx = kl \sin \omega t.$$

Имея в виду (3), результирующая механическая сила будет вычисляться как

$$f = f_k + f_\mu = kl \sin \omega t + \mu \omega l \cos \omega t = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot$$

$$\left( \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \sin \omega t + \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \cos \omega t \right).$$

Для удобства дальнейших преобразований можно обозначить:

$$\varphi = \arctg = \frac{k}{\mu \omega}.$$

С учетом этого выражение для результирующей силы примет вид:

$$f = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} (\sin \varphi \cdot \sin \omega t + \cos \varphi \cdot \cos \omega t) = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi).$$

Очевидно, что амплитуда мгновенного значения силы имеет вид:

$$F_m = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}.$$

Действующее значение результирующей силы по аналогии с выражением для скорости (1) равно:

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Мгновенная результирующая мощность при вынужденной гармонической деформации упругого тела определяется как

$$s = f v = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = 0.5 \omega l^2 \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cdot [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] = FV \cdot [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi] = FV \cdot (\cos \varphi + \cos 2\omega t \cdot \cos \varphi + \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi) = FV \cdot \cos \varphi \cdot (1 + \cos 2\omega t) + FV \cdot \sin \varphi \cdot (1 + \sin 2\omega t) = p + q_d. \quad (12)$$

Имея в виду (5), (6) и (10), активная механическая мощность будет находиться как:

$$P = FV \cos \varphi = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{\mu \omega^2 l^2}{2}.$$

Принимая во внимание (1), (7), (11) и (12), механическая реактивная (упругая) мощность будет иметь следующий вид:

$$Q_d = FV \sin \varphi = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{k \omega l^2}{2}. \quad (13)$$

При этом:

$$f_k v = kl \sin \omega t \cdot \omega l \cdot \cos \omega t = 0.5kl^2 \omega \sin 2\omega t = F_k V \sin 2\omega t = Q_d \sin 2\omega t.$$

Это соответствует выражениям (12) и (13).

Очевидно, что полная мощность равна:

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2 \omega \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{2}.$$

### Мощность при колебаниях, связанных с гравитационным воздействием

При отклонении на угол  $\alpha$  груза, подвешенного на нити длиной  $L$ , возникает момент:

$$M = mgL\alpha.$$

Пусть  $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$ .

Тогда:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cdot \cos \omega t = \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t.$$

Мгновенная мощность имеет вид:

$$q_g = M\dot{\alpha} = mgL\alpha_0 \sin \omega t \cdot \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{g^3 L} \sin 2\omega t.$$

Ее амплитуда и, соответственно, реактивная мощность гравитационного воздействия определяется как:

$$Q_g = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{g^3 L}.$$

### Реактивная, активная и полная мощности в комплексном представлении

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде:

$$a = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} [Ae^{i(\omega t + \varphi)}],$$

где  $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$  – вращающийся в комплексной плоскости вектор.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина:

$$Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi} = A.$$

называется *комплексной амплитудой* [18].

В [19] показано, что при инертной нагрузке:

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

Мгновенная скорость при этом равна:

$$v = V_m \cos \omega t = \text{Im} \dot{V}_m.$$

Формулы для действующих значений величин принципиально не отличаются:

$$\dot{V} = Ve^{j\pi/2}, \quad \dot{F} = Fe^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}.$$

Особенностью комплексного представления, подробно описанного в электротехнике, является то, что при вычислении полной мощности один из перемножаемых векторов должен быть сопряженным.

$$\underline{S} = \dot{F} \cdot \dot{V} = Fe^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \cdot Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = FVe^{j\varphi} = FV \cos \varphi + jFV \sin \varphi = P + jQ_i.$$

Это выражение для инертной нагрузки. Отличием упругой нагрузки является то, что реактивная мощность имеет противоположный знак:

$$\underline{S} = \dot{F} \cdot \dot{V} = Fe^{j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \cdot Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = FVe^{-j\varphi} = FV \cos \varphi - jFV \sin \varphi = P + jQ_d.$$

При этом:

$$P = \text{Re} \dot{F} \cdot \dot{V},$$

$$Q = \text{Im} \dot{F} \cdot \dot{V}.$$

### Механические реактансы

Пусть к массивному исполнительному органу машины или механизма приложена:

$$f = F_m \cos \omega t. \quad (14)$$

В соответствии с основной аксиомой механики:

$$F_m \cos \omega t = m \frac{dv}{dt}; \quad \int_0^v dv = \frac{F_m}{m} \int_0^t \cos \omega t dt, \\ v = \frac{F_m}{\omega m} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из этого следует, что амплитуда имеет вид:

$$V_m = \frac{F_m}{\omega m} = \frac{F_m}{X_m},$$

где  $X_m$  – инертный реактанс, кг · рад/с.

Полученное выражение можно представить в комплексном виде [20]:

$$\dot{V} = -j \frac{F_m}{\omega m} = \frac{F_m}{i\omega m} = \frac{F_m}{X_m}. \quad (15)$$

Знак « $\leftarrow$ » обусловлен тем, фаза мгновенной скорости отстает от фазы силы на  $\pi/2$ . Комплексные величины, соответствующие синусоиде, обозначаются точкой сверху, прочие – подчеркиваются снизу.

В соответствии с (15) инертный реактанс имеет вид:

$$\underline{X}_m = i\omega m.$$

Он характеризует свойство массивного тела оказывать сопротивление приводу, понуждающему его совершать колебания. Вполне закономерно, что он определяется массой и частотой.

В соответствии с выражением (14) вектор силы ориентирован вдоль вещественной оси комплексной плоскости, поэтому в соответствии с формулой (15) вектор скорости ориентирован вдоль мнимой оси (т.е. скорость – чисто

мнимая). Мгновенное значение реактивной (инерционной) мощности:

$$q_i = fv.$$

Эта величина является мнимой, поскольку является произведением мнимой величины  $v$  на действительную  $f$ .

Реактивная (инерционная) мощность в комплексном виде:

$$\dot{Q}_i = \dot{F} \cdot \dot{V}. \quad (16)$$

Реактивная (инерционная) мощность:

$$Q_i = \frac{F^2}{X_m} = V^2 X_m.$$

Сила трения определяется формулой  $f = \mu v$ , отсюда скорость вычисляется как

$$v = \frac{f}{\mu}.$$

Поскольку вектор силы ориентирован вдоль вещественной оси комплексной плоскости (14) и  $\mu$  – вещественная величина, величина  $v$  является тоже вещественной.

Мгновенное значение активной (тепловой) мощности:

$$p = fv.$$

Активная мощность тоже вещественная величина, поскольку является произведением вещественных величин.

### Активная мощность в комплексном виде

В соответствии с (15) и (16) реактивная (инерционная) мощность представляет собой чисто мнимую величину:

$$\dot{Q}_i = \dot{F} \cdot \dot{V} = -i \frac{(\dot{F})^2}{\omega m}.$$

Активная (тепловая) мощность при любом характере движения, например, развиваемая силой трения скольжения, является вещественной величиной. В этой связи реактивная и активная мощности являются условно «ортогональными». Следовательно, полная механическая мощность определяется выражением (8).

Нетрудно показать, что формула упругого реактанса имеет вид:

$$\underline{X}_k = -i \frac{k}{\omega}.$$

Реактивная (упруго-деформационная) мощность определяется выражением:

$$Q_d = \frac{F}{\underline{X}_k} = V^2 X_k.$$

Эта мощность обусловлена способностью упругого тела запасать и возвращать потенциальную энергию упругой деформации. Реактивная (упруго-деформационная) мощность является чисто мнимой величиной. Её знак противоположен знаку реактивной (инерционной) мощности [20, 21].

Полная мощность также вычисляется по формуле (8).

В механической системе, состоящей из пружины и груза, сумма реактансов будет вычисляться следующим образом:

$$\underline{X} = \underline{X}_m + \underline{X}_k = i\omega_0 m - i \frac{k}{\omega_0}.$$

Если она равна нулю, возникает резонанс:

$$i\omega_0 m - i \frac{k}{\omega_0} = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Активная и реактивная механические мощности, являясь условно «ортогональными», не складываются. Для полной мощности справедлив аналог теоремы Пифагора (точно также, как в электротехнике). Инертный и упругий реактансы характеризуют свойства массивного и упругого тел оказывать сопротивление приводу, понуждающему их совершать колебания [21].

Последние две формулы демонстрируют преимущества использования понятия о механических реактансах и комплексного представления.

В традиционном представлении для получения формулы собственной частоты колебаний маятника требовалось решение дифференциального уравнения второго порядка, тогда как в комплексном виде решение укладывается в одну строчку.

### Механические мощности в векторном представлении

В основе комплексного представления лежит идея вращающихся в комплексной плоскости векторов. Тот же принцип может быть реализован в трехмерном декартовом базисе.

Из (6)–(8) необходимо следует:

$$P = (\mathbf{F}, \mathbf{V}), \quad Q = [\mathbf{F}, \mathbf{V}],$$

$$S^2 = (\mathbf{F}, \mathbf{V})^2 + [\mathbf{F}, \mathbf{V}]^2.$$

Математическая абстракция с проекциями вращающихся векторов имеет конкретную

материальную основу в виде кривошипно-кулисных механизмов.

Возможность одновременного описания гармонических величин с помощью как векторного, так и комплексного представления обусловлена их математической совместимостью. Комплексные величины по существу являются двумерными векторами в комплексной плоскости.

### Заключение

При механических гармонических колебаниях развивается знакоположительная тепловая мощность и знакопеременные реактивные

мощности, характеризующие обратимость кинетической и потенциальной энергий. Полная механическая мощность удовлетворяет формуле Пифагора.

Представление о механических реактивных, активной и полной мощностях является обобщением соответствующих понятий о мощностях из электротехники, что является проявлением электромеханического дуализма [22, 23].

В перспективе возможно представление рассмотренных механических величин с использованием алгебры кватернионов над полем вещественных чисел.

### Список литературы

1. Бурьян Ю.А., Балакин П.Д., Сорокин В.Н. К вопросу о стабилизации амплитуды колебаний механической системы // Омский научный вестник. 2014. № 2 (130). С. 38–44.
2. Загривный Э.А., Иваник В.В. Стабилизация амплитуды колебаний авторезонансного асинхронного электропривода возвратно-вращательного движения динамически уравновешенного бурового снаряда на грузонесущем кабеле // Записки Горного института. 2011. Т. 189. С. 91–94.
3. Шестаков В.М., Белокузов Е.В., Епишкин А.Е. Синтез законов управления режимами работы автоматизированных вибрационных установок // Электричество. 2013. № 11. С. 31–36.
4. Попов И.П. Теория мультиинертного осциллятора // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 3. С. 88–91.
5. Бурьян Ю.А., Сорокин В.Н., Капелюховский А.А. Система управления интенсивностью излучения упругих волн скважинным генератором // Омский научный вестник. 2011. № 1 (97). С. 75–79.
6. Пат. 2624829 Рос. Федерация. Способ управления характеристикой вибрационного поля и устройство для его осуществления / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, А.П. Хоменко и др. № 2015156775: заявл. 28.12.2015; опубл. 07.07.2017, Бюл. № 19. 22 с.
7. Пат. 2624757 Рос. Федерация. Способ управления структурой вибрационного поля вибрационной технологической машины на основе использования эффектов динамического гашения и устройство для его осуществления / С.В. Елисеев, А.В. Елисеев, Е.В. Каимов и др. № 2016102236; заявл. 25.01.2016; опубл. 06.07.2017, Бюл. № 19. 15 с.
8. Управление мехатронными вибрационными установками / Б.Р. Андриевский, И.И. Блехман, Ю.А. Борцов и др. СПб: Наука, 2001. 278 с.
9. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2018. 692 с.
10. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем. Новосибирск: Наука, 2016. 459 с.
11. Васильев М.В., Тульский В.Н. Исследование вопроса компенсации реактивной мощности в электрических сетях «РОССЕТИ ЛЕНЭНЕРГО» // Электроэнергия. Передача и распределение. 2019. № S3 (14). С. 28–33.
12. К вопросу повышения эффективности энергосистем и обоснования компенсации реактивной мощности в электрических сетях / М.М. Султанов, А.В. Стрижиченко, И.А. Болдырев и др. // Надежность и безопасность энергетики. 2020. Т. 13. № 4. С. 267–272. DOI: 10.24223/1999-5555-2020-13-4-267-272.
13. Романовский В.В., Бежик А.С. Повышение качества электрической энергии в судовых электроэнергетических системах // Вестн. гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2021. Т. 13. № 1. С. 87–101. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-87-101.
14. Едемский С.Н., Пушкаренко И.И., Тригуб О.В. Использование устройства компенсации реактивной мощности СТАТКОМ в электроэнергетической системе // Энергобезопасность и энергосбережение. 2013. № 3. С. 27–30.
15. Догадкин Д.И., Скупов Д., Губардина О. Компенсация реактивной мощности в распределительной сети ПАО "МОЭСК" // Электроэнергия. Передача и распределение. 2016. № 6 (39). С. 60–62.
16. Павлов В.Д. Автокомпенсация реактивной мощности в электрических сетях // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2021. 14(6). С. 684–688. DOI: 10.17516/1999-494X-0342.
17. Павлов В.Д. Перетоки реактивной мощности между фазами // Современная техника и технологии: проблемы, состояние и перспективы: материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. Рубцовск, 2021. С. 271–274.
18. Попов И.П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. 2019. № 4. С. 14–24.
19. Павлов В.Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов // Вестн. Урал. гос. ун-та путей сообщ. 2021. № 1 (49). С. 17–27. DOI: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27.

20. Попов И.П. Инертные реактансы вибрационных машин // Вестн. магнитогор. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова. 2019. Т. 17. № 4. С. 52 – 55.
21. Попов И.П. «Ортогональные» мощности при механических колебаниях // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. № 6 (338). С. 12–15.
22. Попов И.П. Зависимость реактивного сопротивления пьезоэлектрического преобразователя от механических параметров его нагрузки // Науч.-техн. вестн. информац. технологий, механики и оптики. 2013. № 5 (87). С. 94–98.
23. Павлов В.Д. Энергетика излучения электрического заряда и её следствия // Изв. Уфим. науч. центра РАН. 2021. № 4. С. 5–8. DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-4-5-8.

### References

- Buryan Yu.A., Balakin P.D., Sorokin V.N. K voprosu o stabilizatsii amplitudy kolebaniy mekhanicheskoi sistemy [On the issue of stabilization of the oscillation amplitude of a mechanical system]. *Omskii nauchnyy vestnik* [Omsk scientific bulletin], 2014, no 2 (130), pp. 38–44.
- Zagrivnyi E.A., Ivanik V.V. Stabilizatsiya amplitudy kolebaniy avtorezonansnogo asinkhronnogo elektroprivoda vozvratno-vrashchatel'nogo dvizheniya dinamicheski uravnoveshennogo burovogo snaryada na gruzonesushchem kabele [Stabilization of the oscillation amplitude of an autoresonance asynchronous electric drive of a reciprocating rotational motion of a dynamically balanced drill string on a carrying cable]. *Zapiski Gornogo instituta* [The Journal of Mining Institute], 2011, vol. 189, pp. 91–94.
- Shestakov V.M., Belokuzov E.V., Epishkin A.E. Sintez zakonov upravleniya rezhimami raboty avtomatizirovannykh vibratsionnykh ustanovok [Synthesis of laws governing the operation modes of automated vibration systems]. *Elektrichestvo Publ.*, 2013, No. 11, pp. 31–36.
- Popov I.P. Teoriya mul'tiinertnogo ostsillyatora [Theory of a multi-inert oscillator]. *Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii* [Problems of mechanical engineering and automation], 2020, no 3, pp. 88–91.
- Buryan Yu.A., Sorokin V.N., Kapelyukhovskii A.A. Sistema upravleniya intensivnost'yu izlucheniya uprugikh voln skvazhinnym generatorom [The system of controlling the radiation intensity of elastic waves by the downhole generator]. *Omskii nauchnyy vestnik* [Omsk scientific bulletin], 2011, no 1 (97), pp. 75–79.
- Eliseev S.V., Eliseev A.V., Khomenko A.P., Artyunin A.I., Pnev A.G., Kashuba V.B. Patent RU 2624829 C1, 07.07.2017.
- Eliseev S.V., Eliseev A.V., Kaimov E.V., Nguen D.H., Vyong K.Ch. Patent RU 2624757 C1, 06.07.2017.
- Andrievskii B.R., Blekhman I.I., Bortsov Yu.A., Gavrilov S.V., Konoplev V.A., Lavrov B.P., Polyakhov N.D., Tomchin O.P., Fradkov A.L., Shestakov V.M. Upravlenie mekhatronnymi vibratsionnymi ustanovkami [Control of mechatronic vibration units]. Saint-Petersburg: Nauka Publ., 2001, 278 p.
- Eliseev S.V. Prikladnoi sistemnyi analiz i strukturnoe matematicheskoe modelirovanie (dinamika transportnykh i tekhnologicheskikh mashin: svyaznost' dvizhenii, vibratsionnye vzaimodeistviya, rychazhnye svyazi) [Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of motions, vibrational interactions, lever linkages)]. Irkutsk: IrGUPS Publ., 2018, 692 p.
- Eliseev S.V., Artyunin A.I. Prikladnaya teoriya kolebaniy v zadachakh dinamiki lineinykh mekhanicheskikh sistem [Applied theory of oscillations in problems of the dynamics of linear mechanical systems]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2016, 459 p.
- Vas'kov M.V., Tul'skii V.N. Issledovaniye voprosa kompensatsii reaktivnoi moshchnosti v elektricheskikh setyakh "ROSSETI LENENERGO" [Investigation of the issue of compensation of reactive power in electrical networks "ROSSETI LENENERGO"]. *Elektroenergiya. Peredacha i raspredeleniye* [Electricity. Transmission and distribution], 2019, no S3 (14), pp. 28-33.
- Sultanov M.M., Strizhichenko A.V., Boldyrev I.A., Zhelyaskova O.I., Voloshin Ye.A., Rogozinnikov Ye.I. K voprosu povysheniya effektivnosti energosistem i obosnovaniya kompensatsii reaktivnoi moshchnosti v elektricheskikh setyakh [On the issue of increasing the efficiency of power systems and justifying the compensation of reactive power in electrical networks]. *Nadezhnost' i bezopasnost' energetiki* [Reliability and Safety of Energy], 2020, vol. 13, no 4, pp. 267-272. DOI: 10.24223/1999-5555-2020-13-4-267-272.
- Romanovskii V.V., Bezhik A.S. Povysheniye kachestva elektricheskoi energii v sudovykh elektroenergeticheskikh sistemakh [Improving the quality of electrical energy in ship power systems]. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* [Bulletin of the State University of Marine and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov], 2021, V. 13, No. 1, pp. 87–101. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-87-101.
- Yedemskii S.N., Pushkarenko I.I., Trigub O.V. Ispol'zovaniye ustroystva kompensatsii reaktivnoy moshchnosti STATKOM v elektroenergeticheskoy sisteme [Using the STATCOM reactive power compensation device in the electric power system]. *Energobezopasnost' i energosberezheniye* [Energy security and energy saving], 2013, no 3, pp. 27-30.
- Dogadkin D.I., Skupov D., Gubardina O. Kompensatsiya reaktivnoy moshchnosti v raspredelitel'noy seti PAO «MOESK» [Compensation of reactive power in the distribution network of PJSC «MOESK»]. *Elektroenergiya. Peredacha i raspredeleniye* [Electricity. Transmission and distribution], 2016, no 6 (39), pp. 60-62.
- Pavlov V.D. Avtokompensatsiya reaktivnoy moshchnosti v elektricheskikh setyakh [Auto-compensation of reactive power in electrical networks]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Tekhnika i tekhnologii* [Journal of the Siberian Federal University. Technics and technology], 2021, 14(6), С. 684–688. DOI: 10.17516/1999-494X-0342.
- Pavlov V.D. Peretoki reaktivnoi moshchnosti mezhdru fazami [Reactive power flows between phases]. *Materialy XI Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Sovremennaya tekhnika i tekhnologii: problemy, sostoyaniye i perspektivy»* [Proceedings of the XI All-Russian Scientific and Practical Conference «Modern equipment and technologies: problems, state and perspectives»], Rubtsovsk, 2021, pp. 271–274.



18. Popov I.P. Primenenie simvolicheskogo (kompleksnogo) metoda dlya rascheta slozhnykh mekhanicheskikh sistem pri garmonicheskikh vozdeistviyakh [Application of the symbolic (complex) method for calculating complex mechanical systems under harmonic influences]. *Prikladnaya fizika i matematika* [Applied Physics and Mathematics], 2019, no 4, pp. 14 – 24.

19. Pavlov V.D. Matematicheskiye modeli rezonansnykh i antirezonansnykh protsessov [Mathematical models of resonant and antiresonant processes]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya* [Bulletin of the Ural State Transport University], 2021, № 1(49), pp. 17–27. DOI: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27.

20. Popov I.P. Inertnye reaktansy vibratsionnykh mashin [Inert reactants of vibrating machines]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G.I. Nosova* [Bulletin of Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov], 2019, vol. 17, no 4, pp. 52 – 55.

21. Popov I.P. «Ortogonal'nye» moshchnosti pri mekhanicheskikh kolebaniyakh [«Orthogonal» power at mechanical vibrations]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and applied problems of technic and technology], 2019, no 6 (338), pp. 12 – 15.

22. Popov I.P. Zavisimost' reaktivnogo soprotivleniya p'yezoelektricheskogo preobrazovatelya ot mekhanicheskikh parametrov ego nagruzki [Dependence of the reactance of a piezoelectric transducer on the mechanical parameters of its load]. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki* [Scientific and technical bulletin of information technologies, mechanics and optics], 2013, no 5 (87), pp. 94–98.

23. Pavlov V.D. Energetika izlucheniya elektricheskogo zaryada i ee sledstviya [Energetics of radiation of an electric charge and its consequences]. *Izvestiya Ufmskogo nauchnogo tsentra RAN* [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2021, no 4, С. 5–8. 10.31040/2222-8349-2021-0-4-5-8.

### Информация об авторе

**Павлов Валентин Дмитриевич**, канд. техн. наук, начальник научно-информационного отдела, Владимирский электромеханический завод, г. Владимир, e-mail: pavlov.val.75@mail.ru

### Information about the authors

**Valentin D. Pavlov**, Ph.D. in Engineering Science, Head of the Science and Information Department, Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, e-mail: pavlov.val.75@mail.ru