

## Ротатор с постоянной частотой вращения

И.П. Попов✉

Курганский государственный университет, г. Курган, Российская Федерация

✉ip.popov@yandex.ru

### Резюме

Цель работы – нахождение механического аналога циклотронного движения и определение схемы соответствующего устройства, которое уместно назвать стабилизированным ротатором. Тема стабилизации частоты вращения является актуальной. Из ключевого обстоятельства, определяющего возможность распространения циклотронного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии (применительно к стабилизированному ротатору нужно трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий), необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запастись оба этих вида энергии, а именно, груз и пружина. Собственная частота вращения стабилизированного ротатора строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами. При смене момента импульса изменяется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом остается прежней и равна собственной). При нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизированного ротатора не может быть произвольной и принимает единственное значение. Подобно тому как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой, частота вращения стабилизированного ротатора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения. Стабилизированный ротатор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, хотя в этом случае он имеет возможность сильной конкуренции со стороны мехатронных систем. Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

### Ключевые слова

стабилизированный ротатор, маятник, частота вращения, потенциальная энергия, кинетическая энергия, момент импульса, циклотронное движение

### Для цитирования

Попов И.П. Ротатор с постоянной частотой вращения / И.П. Попов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 3(75). – С. 10–17. – DOI 10.26731/1813-9108.2022.3(75).10-17.

### Информация о статье

поступила в редакцию: 11.06.2022 г.; поступила после рецензирования: 15.09.2022 г.; принята к публикации: 19.09.2022 г.

## Rotator with constant frequency

I.P. Popov✉

Kurgan State University, Kurgan, the Russian Federation

✉ip.popov@yandex.ru

### Abstract

The aim of the work is to find a mechanical analogue of cyclotron motion and to determine the scheme of the corresponding device to be appropriately called a stabilized rotator. The topic of speed stabilization is relevant. From the key circumstance determining the possibility of generalizing cyclotron motion to mechanics, consisting in the fact that the Lagrangian of an electron is twice as large as its kinetic energy, which, as applied to a stabilized rotator, should be interpreted as the equality of kinetic and potential energies, it follows that a stabilized rotator should include elements, capable to store both of these types of energy, namely, the load and the spring. The natural frequency of rotation of a stabilized rotator is strictly fixed (it does not depend on either the moment of inertia or the angular momentum) and remarkably coincides with the natural frequency of oscillations of a pendulum with identical parameters. When the angular momentum changes, the radius and tangential velocity change (while the rotation frequency does not change and is equal to the natural). At zero torque in the stationary mode, the rotational frequency of the stabilized rotator cannot be random and takes on a single value. Just as the forced oscillation frequency of the pendulum does not coincide with its natural frequency, the rotation frequency of a stabilized rotator under loading does not coincide with its natural rotation frequency. A stabilized rotator can be used to control the natural frequency of a radial oscillator, although in this case it may meet strong competition from mechatronic systems. On the contrary, as a rotation stabilizer, its competitive capabilities are undeniable and are determined by the extreme simplicity of the design.

### Keywords

stabilized rotator, pendulum, rotation frequency, potential energy, kinetic energy, angular momentum, cyclotron motion

**For citation**

Popov I.P. Rotator s postoyannoi chastotoi vrashcheniya [Rotator with constant frequency]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, no. 3 (75), pp. 10–17. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.3(75).10-17.

**Article info**

Received: June 11, 2022; Received: September 15, 2022; Accepted: September 19, 2022.

**Введение**

Для нормальной работы многих технических систем требуется стабилизированная частота вращения. К таким системам относятся генераторные установки переменного тока, насосные станции, конвейерные линии, обрабатывающие станки, ветрогенераторы и др.

Существующие ротаторы могут свободно вращаться с любой скоростью, поэтому для их стабилизации используют специальные устройства, как правило, следящего типа, что приводит к усложнению и удорожанию конструкций.

В этой связи представляет интерес возможность создания ротатора с фиксированной частотой свободного вращения, что и является целью настоящей работы.

Механические и электромагнитные явления и процессы во многих случаях математически изоморфны [1–3]. Это дает возможность использовать достижения одной научной специальности в другой. В этом смысле представляет интерес циклотронное движение электрического заряда [4], которое характеризуется *фиксированной частотой вращения*. Это следует из баланса сил:

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{qB}{m}r = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m},$$

где  $q$  – величина электрического заряда;  $v$  – тангенциальная скорость заряда;  $B$  – магнитная индукция;  $m$  – масса заряженной частицы;  $r$  – радиус циклотронного движения;  $\omega$  – частота вращения.

Частота действительно не зависит ни от скорости, ни от радиуса.

Ключевым обстоятельством для возможности распространения циклотронного движения на механику является то, что лагранжиан электрона, движущегося поперек постоянного магнитного поля, вдвое больше его кинетической энергии:

$$L = \frac{mv^2}{2} + e(v, A).$$

Векторный потенциал магнитного поля равен

$$A = \frac{1}{2}[B, r].$$

При этом  $v = [\omega, r]$ . Таким образом,

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}.$$

Второе слагаемое равно

$$\frac{q^2 B^2 r^2}{2m} = \frac{q^2 B^2}{2m} \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{mv^2}{2}. L = 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Целью работы является нахождение механического аналога циклотронного движения и определение схемы соответствующего устройства, которое уместно назвать стабилизированным ротатором.

Тема стабилизации частоты вращения является актуальной [5–7].

**Методика**

При создании стабилизированного ротатора следует учитывать, что, с одной стороны, основная масса известных ротаторов характеризуется тем, что их скорость вращения не является фиксированной, а с другой стороны, механизмом, обладающим фиксированным частотным параметром, является пружинный маятник.

Таким образом, ключом к достижению поставленной цели может быть объединение свойств ротатора и пружинного маятника.

Теоретической основой такого объединения является разложение вращательного движения на два взаимно ортогональных гармонических движения:

$$r^2 = r^2 \cos^2 \varphi(t) + r^2 \sin^2 \varphi(t).$$

И наоборот, два взаимно ортогональных гармонических движения образуют вращательное движение.

Это обстоятельство косвенно свидетельствует о том, что в состав стабилизированного ротатора могут входить конструктивные элементы пружинного маятника.

**Синтез стабилизированного ротатора**

Из ключевого обстоятельства, определяющего возможность распространения циклотрон-

ного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии (применительно к стабилизированному ротатору следует трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий), необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запасать оба этих вида энергии, а именно, груз (массой  $m$ ) и пружина (с коэффициентом упругости  $k$ ).

Согласно характеру циклотронного движения и, соответственно, ротатора, имеет место радиус вращения ( $r$ ) и циклическая частота ( $\omega$ ).

Из равенства энергий следует:

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\Delta x}{r},$$

где  $\Delta x$  – абсолютная деформация пружины.

Неизменность циклической частоты обеспечивается очевидным ключевым условием  $\Delta x = r$ .

Установленные необходимые обстоятельства определяют принципиальную схему стабилизированного ротатора, которая представлена на рис. 1.

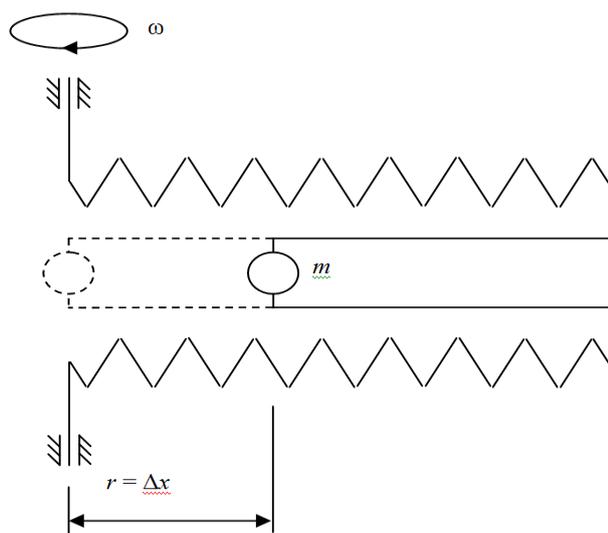


Рис. 1. Стабилизированный ротатор  
Fig. 1. Stabilized rotator

Собственная частота вращения стабилизированного ротатора:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной ча-

стотой колебаний маятника с идентичными параметрами [8, 9].

### Кинематика стабилизированного ротатора

Момент импульса стабилизированного ротатора равен:

$$L = J\omega_0 = mr^2\omega_0 = mr^2\sqrt{\frac{k}{m}} = r^2\sqrt{mk}.$$

Здесь  $J$  – момент инерции,  $x_\omega = \sqrt{mk}$  – волновой реактанс [10]. При этом:

$$r = \frac{v}{\omega_0}; L = r^2x_\omega = \frac{v^2}{\omega_0^2}x_\omega = v^2\frac{m}{k}\sqrt{mk} = \frac{m}{\omega_0}v^2.$$

При изменении момента импульса меняется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения остается прежней и равна собственной).

Положению груза, при котором его центр масс совпадает с осью вращения, соответствует состояние неопределенного равновесия. При вращении груз равновероятно может отклониться в любую из двух сторон и, соответственно, будет развиваться как сжатие, так и растяжение пружины.

Состояние неопределенного равновесия можно исключить, обеспечив начальное (статическое) смещение груза  $r_0$  и равную ему начальную деформацию пружины.

### Динамика стабилизированного ротатора

При раскручивании преднапряженного ротатора до частоты  $\omega_0$  центробежная сила  $m\omega^2r$  меньше силы начальной деформации пружины  $kr_0$ , поэтому радиус  $r_0$  не изменяется. Это участок линейной динамики  $[0, \omega_0]$ :

$$r = r_0, \quad \omega = \frac{M}{mr_0^2}t.$$

За время  $t_0$  при постоянном вращающем моменте  $M$  ротатор достигнет частоты вращения  $\omega_0$ :

$$t_0 = \frac{\omega_0 mr_0^2}{M} = \frac{\sqrt{mk}r_0^2}{M} = \frac{L_0}{M}.$$

При дальнейшем нагружении стабилизированного ротатора вращающим моментом его динамика (нелинейный участок) описывается системой двух дифференциальных уравнений – вращательного и поступательного (радиального):

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J} = \frac{M}{mr^2} \\ m \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{mv^2}{r} - kr = \frac{m\omega^2 r^2}{r} - kr = (m\omega^2 - k)r \end{cases}.$$

Трение здесь не учитывается.

Начальные условия:

$$\omega|_{t=t_0} = \omega_0, \quad r|_{t=t_0} = r_0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Из системы уравнений и начальных условий следует:

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{M}{mr_0^2}.$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -2\frac{M}{mr^3}\frac{dr}{dt}, \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (\omega^2 - \omega_0^2)r, \quad \left. \frac{d^2r}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^3r}{dt^3} = 2\omega\frac{d\omega}{dt}r + (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{dr}{dt},$$

$$\left. \frac{d^3r}{dt^3} \right|_{t=t_0} = 2\omega_0\frac{M}{mr_0^2}r_0 = 2\omega_0\frac{M}{mr_0}.$$

$$\frac{d^3\omega}{dt^3} = 6\frac{M}{mr^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2\frac{M}{mr^3}\frac{d^2r}{dt^2}, \quad \left. \frac{d^3\omega}{dt^3} \right|_{t=t_0} = 0.$$

$$\frac{d^4\omega}{dt^4} = -24\frac{M}{mr^5}\left(\frac{dr}{dt}\right)^3 + 6\frac{M}{mr^4}2\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + 6\frac{M}{mr^4}\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - 2\frac{M}{mr^3}\frac{d^3r}{dt^3},$$

$$\left. \frac{d^4\omega}{dt^4} \right|_{t=t_0} = -2\frac{M}{mr_0^3}2\omega_0\frac{M}{mr_0} = -4\omega_0\frac{M^2}{m^2r_0^4}.$$

$$\frac{d^4r}{dt^4} = 2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2r + 2\omega\frac{d^2\omega}{dt^2}r + 2\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dr}{dt} + 2\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dr}{dt} + (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{d^2r}{dt^2},$$

$$\left. \frac{d^4r}{dt^4} \right|_{t=t_0} = 2\left(\frac{M}{mr_0^2}\right)^2r = \frac{2M^2}{m^2r_0^3}.$$

Частота вращения стабилизированного ротора и радиус представимы в виде:

$$\begin{aligned} \omega &\approx \frac{1}{0!}\omega(0)t^0 + \frac{1}{1!}\frac{d\omega}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2\omega}{dt^2}(0)t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{d^3\omega}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4\omega}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2}t + \frac{1}{2!}0t^2 + \frac{1}{3!}0t^3 - \frac{1}{4!}4\omega_0\frac{M^2}{m^2r_0^4}t^4 + \dots = (2) \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2}t - \frac{\omega_0 M^2}{6m^2r_0^4}t^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{1}{0!}r(0)t^0 + \frac{1}{1!}\frac{dr}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2r}{dt^2}(0)t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{d^3r}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4r}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \\ &= r_0 + 0t + \frac{1}{2!}0t^2 + \frac{1}{3!}2\omega_0\frac{M}{mr_0}t^3 + \frac{1}{4!}\frac{2M^2}{m^2r_0^3}t^4 + \dots = \\ &= r_0 + \frac{\omega_0 M}{3mr_0}t^3 + \frac{M^2}{12m^2r_0^3}t^4 + \dots \end{aligned}$$

Вопрос о сходимости рядов здесь не рассматривается [11–13].

Смысл последних двух уравнений состоит в иллюстрации нелинейности динамики стабилизированного ротора при нагружении его постоянным вращающим (тормозящим) моментом.

Подобно тому как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой, частота вращения стабилизированного ротора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения.

Из (2) следует, что чем меньше момент  $M$  и больше  $m$  и  $r_0$ , тем меньше отклонение частоты вращения  $\omega$  от собственной  $\omega_0$ .

### Использование стандартного классического решения

Стабилизированный ротор в виде суперпозиции двух ортогональных пружинных маятников (рис. 2) представлен выражением:

$$r(t) = ir \cos \varphi(t) + jr \sin \varphi(t).$$

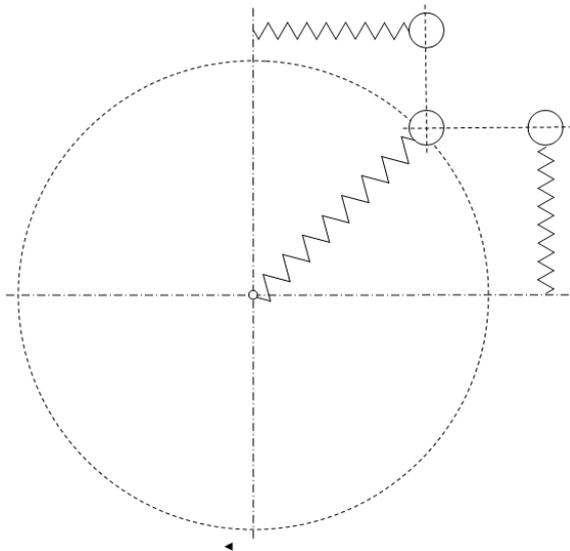


Рис. 2. Суперпозиция пружинных маятников  
Fig. 2. Superposition of spring pendulums

Это дает возможность использовать хрестоматийные решения для вынужденных колебаний маятника при описании нестационарного режима стабилизированного ротатора, а именно:

$$r(t) = i[r_0 e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) + j[r_0 e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)].$$

Здесь  $r_0$  – начальный радиус;  $\delta = R/(2m)$  – коэффициент затухания;  $R$  – коэффициент сопротивления;  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$ ,  $\varphi_1$  – начальная фаза;  $\omega$  – частота вынужденных колебаний;  $x_0 = F/(2m)$ ;  $F$  – возмущающая сила.

По мере затухания собственных колебаний стабилизированный ротатор будет вращаться с циклической частотой  $\omega$ , а его радиус примет значение:

$$r = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{2mF}{R\sqrt{R^2 + 16m^2 \omega^2}}.$$

При  $\omega_1^2 \leq 0$  происходит аperiодическое затухание.

### Второе замечательное свойство стабилизированного ротатора

Первым замечательным свойством является фиксированная собственная частота вращения (1) и ее совпадение с собственной частотой колебаний маятника.

При *вынужденном* вращении стабилизированного ротатора с постоянной частотой  $\omega = a\omega_0$  ( $a$  – безразмерный коэффициент) его радиальная динамика определяется уравнением:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r = (a^2 \omega_0^2 - \omega_0^2)r = -(1 - a^2)\omega_0^2 r.$$

В зависимости от значения  $a$  возможны три варианта.

1. При  $a < 1$  имеет место дифференциальное уравнение свободных гармонических незатухающих колебаний с собственной частотой

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}.$$

Таким образом, стабилизированный ротатор дает возможность управлять собственной ча-

стотой радиального осциллятора [14, 15].

2. При  $a = 1$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = V = \text{const}, \quad r = r_{01} + Vt.$$

Колебания не происходят.

3. При  $a > 1$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = (a^2 - 1)\omega_0^2 r, \quad r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1})t}.$$

Колебания не происходят.

Затухание колебаний в стабилизированном ротаторе принципиально не отличается от затухания в обычном маятнике [16–18].

### Выбег ротатора в стабилизированном режиме

Минимальная полная энергия стабилизированного ротатора в стабилизированном режиме соответствует статическому смещению груза  $r_0$ :

$$W_0 = K_0 + U_0 = 2K_0 = 2U_0 = kr_0^2.$$

Максимальная полная энергия теоретически не ограничена, а практически определяется конструктивно установленным максимальным радиусом  $r_m$ :

$$W_m = kr_m^2.$$

Пусть средняя за выбег мощность диссипативных потерь равна  $P$ .

Тогда время выбега составит

$$\tau = \frac{W_m - W_0}{P} = k \frac{r_m^2 - r_0^2}{P}.$$

Очевидно, что чем меньше  $P$ , тем меньше отклонение частоты вращения  $\omega$  от собственной  $\omega_0$ .

### Основные результаты

1. Стабилизация частоты вращения ротатора (и заряда при циклотронном движении) обусловлена равенством кинетической и потенциальной энергий.

2. Стабилизация частоты вращения обеспечивается равенством радиуса вращения и величины деформации упругого элемента.

3. Собственная частота вращения ротатора равна собственной частоте колебаний маятника с идентичными параметрами.

4. При изменении момента импульса радиус и тангенциальная скорость изменяются таким образом, что частота вращения остается прежней и равна собственной.

5. Происходит изменение собственной

частоты колебаний радиального маятника  $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-a^2}$  при вынужденном вращении стабилизированного ротора с постоянной частотой  $\omega = a\omega_0$  ( $a < 1$ ).

6. При вынужденном вращении стабилизированного ротора с постоянной частотой  $\omega = \omega_0$  радиус вращения линейно возрастает  $r = r_{01} + Vt$ .

7. При вынужденном вращении стабилизированного ротора с постоянной частотой, превышающей собственную, радиус вращения возрастает экспоненциально  $r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2-1})t}$ .

8. Установлено дуальное соответствие циклотронного движения электрического заряда и вращения механического ротора.

9. Математическая модель строится на основе уже имеющейся конструкции. В настоящей работе принципиальное конструктивное решение возникло как следствие математической модели.

## Заключение

Заявленная цель работы достигнута. Механический аналог циклотронного движения определен. Им является стабилизированный

ротор, обладающий фиксированной частотой вращения, не зависящей от момента импульса и момента инерции.

Это означает, что при нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизированного ротора не может быть произвольной и принимает единственное значение.

Другими особенностями стабилизированного ротора являются идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергии и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Стабилизированный ротор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, но в этом качестве он может иметь конкуренцию со стороны мехатронных систем [19, 20].

Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

## Список литературы

1. Попов И.П. Реактансы и сассептансы механических систем // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2021. № 70. С. 64–75.
2. Павлов В.Д. Накопитель энергии транспортно-технологической машины с возможностью автоматического управления // Автоматизированные технологии и производства. 2021. № 2 (24). С. 7–10.
3. Попов И.П. Электромагнитный маховик для ориентирования орбитальных объектов // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2019. № 2. С. 15–17.
4. Павлов В.Д. Теоремы об излучении заряда // Инженерная физика. 2021. № 6. С. 37–40.
5. Вершинин А.С. Варианты построения высокоточных систем стабилизации скорости вращения вала электродвигателя постоянного тока // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. 2020. № 12. С. 77–86.
6. Исломов И.И. Функциональная схема стабилизации частоты вращения ветрогенератора с использованием электромагнитного редуктора // Энергетик. 2017. № 5. С. 41–43.
7. Николаев В.Т. Исследование компенсационной схемы стабилизации скорости вращения миниатюрного коллекторного электродвигателя постоянного тока // Электронные информационные системы. 2021. № 3 (30). С. 25–32.
8. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение тележки с маятником // Изв. Рос. акад. наук. Теория и системы управления. 2021. № 1. С. 30–41.
9. Гладков С.О., Богданова С.Б. Теория детерминированного хаоса в системе  $n$  взаимодействующих компланарных маятников // Инженерная физика. 2019. № 3. С. 9–21.
10. Попов И.П. Применение символического (комплексного) метода для исследования околорезонансных явлений // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 4. С. 145–153.
11. Гайсина Г.А. Порядок роста ряда экспонент вблизи границы области сходимости // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 3. С. 31–50.
12. Беляев В.А. О сходимости по диагоналям и абсолютной сходимости степенных рядов с действительными коэффициентами // Электронный журнал: наука, техника и образование. 2019. № 1 (23). С. 98–107.
13. Тимошенко В.В. К сходимости в смысле Чезаро числовых рядов // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 179. С. 78–80.
14. Анахаев К.Н. О ротационном (вращательном) движении математического маятника // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462. № 4. С. 412–417.

15. Маркеев А.П. О маятнике на вращающемся и вибрирующем основании // Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. №5. С. 542–546.
16. Шишкин В.М., Левашов А.П. Моделирование затухающих колебаний пластины с учетом амплитудно-зависимого рассеяния энергии в материале // Advanced Science. 2017. № 3 (7). С. 367–376.
17. Стец А.А. Аппроксимация затухающих колебаний крупногабаритных космических конструкций // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 3 (96). С. 64–76.
18. Бояркина И.В., Бояркин Г.Н. Математическое моделирование расчёта переходных процессов затухающих колебаний пневмоколеса // Строительные и дорожные машины. 2021. № 4. С. 8–13.
19. Попов И.П. Источники гармонической силы и скорости в мехатронных автоматических системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. № 22 (4). С. 208–216.
20. Молодцов Н.А., Петров С.П. Использование микроконтроллера для стабилизации скорости вращения ротора двигателя постоянного тока // КИП и автоматика: обслуживание и ремонт. 2021. № 10. С. 4–7.

### References

1. Popov I.P. Reaktansy i susceptansy mekhanicheskikh sistem [Reactances and susceptances of mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and mechanics], 2021, no. 70, pp. 64–75.
2. Pavlov V.D. Nakopitel' energii transportno-tehnologicheskoy mashiny s vozmozhnost'yu avtomaticheskogo upravleniya [Energy accumulator of a transport-technological machine with the possibility of automatic control]. *Avtomatizirovannyye tekhnologii i proizvodstva* [Automated technologies and production], 2021, no. 2 (24), pp. 7–10.
3. Popov I.P. Elektromagnitnyi makhovik dlya oriyentirovaniya orbital'nykh ob'yektov [Electromagnetic flywheel for orientation of orbital objects]. *Oboronnyi kompleks – nauchno-tehnicheskomu progressu Rossii* [Defense complex – scientific and technical progress of Russia], 2019, no. 2, pp. 15–17.
4. Pavlov V.D. Teoremy ob izluchenii zaryada [Theorems on charge radiation]. *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2021, no. 6, pp. 37–40.
5. Vershinin A.S. Varianty postroyeniya vysokotochnykh sistem stabilizatsii skorosti vrashcheniya vala elektrodvigatelya postoyannogo toka [Options for constructing high-precision systems for stabilizing the speed of rotation of the DC motor shaft]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S. Fundamental'nye nauki* [Bulletin of the Polotsk State University. Series C. Basic Sciences], 2020, no. 12, pp. 77–86.
6. Islomov I.I. Funktsional'naya skhema stabilizatsii chastoty vrashcheniya vetrogeneratora s ispol'zovaniyem elektromagnitnogo reduktora [Functional scheme for stabilizing the frequency of rotation of a wind generator using an electromagnetic gearbox]. *Energetik* [Power Engineer], 2017, no. 5, pp. 41–43.
7. Nikolayev V.T. Issledovaniye kompensatsionnoi skhemy stabilizatsii skorosti vrashcheniya miniyurnogo kollektornogo elektrodvigatelya postoyannogo toka [Investigation of the compensation scheme for stabilizing the rotation speed of a miniature collector DC motor]. *Elektronnyye informatsionnye sistemy* [Electronic information systems], 2021, no. 3(30), pp. 25–32.
8. Kayumov O.R. Optimal'noye po bystrodeistviyu peremeshchenie telezhki s mayatnikom [Speed-optimal movement of a trolley with a pendulum]. *Izvestiya Rossiyskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems], 2021, no. 1, pp. 30–41.
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Teoriya determinirovannogo khaosa v sisteme  $n$  vzaimodeistvuyushchikh komplanarnykh mayatnikov [Theory of deterministic chaos in a system of  $n$  interacting coplanar pendulums]. *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2019, no. 3, pp. 9–21.
10. Popov I.P. Primeneniye simvolicheskogo (kompleksnogo) metoda dlya issledovaniya okolorezonansnykh yavlenii [Application of the symbolic (complex) method for the study of near-resonance phenomena]. *Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii* [Problems of mechanical engineering and automation], 2020, no. 4, pp. 145–153.
11. Gaysina G.A. Poryadok rosta ryada eksponent vblizi granitsy oblasti skhodimosti [The order of growth of a series of exponentials near the boundary of the convergence region]. *Algebra i analiz* [Algebra and Analysis], 2021, vol. 33, no. 3, pp. 31–50.
12. Belyaev V.A. O skhodimosti po diagonal'yam i absolyutnoy skhodimosti stepennykh ryadov s deystvitel'nymi koeffitsientami [On diagonal convergence and absolute convergence of power series with real coefficients]. *Elektronnyi zhurnal: nauka, tekhnika i obrazovanie* [Electronic journal: science, technology and education], 2019, no. 1 (23), pp. 98–107.
13. Timoshenko V.V. K skhodimosti v smysle Chezaro chislovykh ryadov [Convergence in the sense of Cesaro of numerical series]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews], 2020, vol. 179, pp. 78–80.
14. Anakhayev K.N. O rotatsionnom (vrashchatel'nom) dvizhenii matematicheskogo mayatnika [On the rotational (rotational) motion of a mathematical pendulum]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2015, vol. 462, no. 4, pp. 412–417.
15. Markeev A.P. O mayatnike na vrashchayushemsya i vibriruyushchem osnovanii [About the pendulum on a rotating and vibrating base]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2017, vol. 477, no. 5, pp. 542–546.
16. Shishkin V.M., Levashov A.P. Modelirovaniye zatukhayushchikh kolebaniy plastiny s uchetom amplitudno-zavisimogo rasseyaniya energii v materiale [Modeling of damped oscillations of a plate taking into account the amplitude-dependent energy dissipation in the material]. *Advanced Science*, 2017, no. 3 (7), pp. 367–376.
17. Stets A.A. Approssimatsiya zatukhayushchikh kolebaniy krupnogabaritnykh kosmicheskikh konstruksii [Approximation of damped oscillations of large space structures]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E.*

*Baumana. Seriya Estestvennye nauki* [Bulletin of the Moscow State Technical University named N.E. Bauman. Series Natural Sciences], 2021, no. 3 (96), pp. 64–76.

18. Boyarkina I.V., Boyarkin G.N. Matematicheskoe modelirovanie rascheta perekhodnykh protsessov zatukhayushchikh kolebaniy pnevmokolesa [Mathematical modeling of the calculation of transient processes of damped oscillations of the pneumatic wheel]. *Stroitel'nye i dorozhnye mashiny* [Construction and road machines], 2021, no. 4, pp. 8–13.

19. Popov I.P. Istochniki garmonicheskikh sily i skorosti v mekhatronnykh avtomaticheskikh sistemakh [Sources of harmonic forces and speeds in mechatronic automatic systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2021, no. 22(4), pp. 208–216.

20. Molodtsov N.A., Petrov S.P. Ispol'zovaniye mikrokontrollera dlya stabilizatsii skorosti vrashcheniya rotora dvigatelya postoyannogo toka [Using a microcontroller to stabilize the rotor speed of a DC motor]. *KIP i avtomatika: obsluzhivanie i remont* [Instrumentation and automation: maintenance and repair], 2021, no. 10, pp. 4–7.

#### **Информация об авторах**

**Попов Игорь Павлович**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры технологии машиностроения, металлорежущих станков и инструментов, Курганский государственный университет, г. Курган; e-mail: ip.popov@yandex.ru.

#### **Information about the authors**

**Igor P. Popov**, Ph.D. in Engineering Science, Assistant Professor of the Department of Mechanical Engineering, Metal-Cutting Machines and Tools, Kurgan State University, Kurgan; e-mail: ip.popov@yandex.ru.