ORIGINAL PAPER
Modern technologies. System analysis. Modeling *2022. No. 3 (75), pp. 29–37*
DOI 10.26731/1813-9108.2022.3(75).29-37 **УДК** 62-97/98

Квазианалитический метод решения дифференциальных уравнений электромашинных вентильных систем

А.В. Данеев[1]✉, Р.А. Данеев[2], В.Н. Сизых[1], А.П. Хоменко[1]
[1]*Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*
[2]*Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Российская Федерация*
✉daneev@mail.ru

Резюме
В теории электрических машин наметилась тенденция к применению строгих в математическом смысле методов приведения периодических систем к системам уравнений с постоянными коэффициентами. В статье на основе модифицированного метода приведения систем с периодическими коэффициентами к системам с постоянными коэффициентами предложен численно-аналитический метод построения упрощенных математических моделей многофазных вентильных машин. Численно-аналитические расчеты, проводимые с помощью данного метода, учитывают нестационарные свойства периодических систем уравнений вентильной машины и справедливы при анализе электромеханических процессов в широком диапазоне изменения частот вращения ротора. Если известны алгоритм работы ключей и топология схем замещения, то для каждой схемы замещения можно составить систему дифференциальных уравнений минимального порядка (по числу проводящих вентилей) и затем решать ее до того момента времени, пока состояние одного из вентилей схемы не изменится. «Сливание» решений дифференциальных уравнений, соответствующих различным межкоммутационным интервалам, осуществляется обычным методом припасовывания. Такой подход получил название метода переменной структуры и применяется при исследовании нормальных эксплуатационных режимов работы вентильного синхронного генератора, когда последовательность образования схем замещения заранее определена из предшествующих результатов натурного эксперимента, либо путем математического моделирования на электронно-вычислительной машине с помощью универсальных математических моделей. Предлагаемый метод рекомендуется применять, например, при анализе и синтезе регуляторов напряжения, а также для сравнения полученных результатов с результатами численных экспериментов на основе моделирующих программ более высокого уровня.

Ключевые слова
математическая модель, многофазные вентильные машины, электромеханические процессы электромашинных вентильных систем

Для цитирования
Данеев А.В. Квазианалитический метод решения дифференциальных уравнений электромашинных вентильных систем / А.В. Данеев, Р.А. Данеев, В.Н. Сизых, А.П. Хоменко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 3(75). – С. 29–37. – DOI 10.26731/1813-9108.2022.3(75).29-37.

Информация о статье
поступила в редакцию: 7.09.2022 г.; поступила после рецензирования: 13.09.2022 г.; принята к публикации: 14.09.2022 г.

Quasi-analytical method for solution of differential equations of electric machine valve systems

A.V. Daneev[1]✉, R.A. Daneev[2], V.N. Sizykh[1], A.P. Khomenko[1]
[1]*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation*
[2]*East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russian Federation, Irkutsk, the Russian Federation*
✉daneev@mail.ru

Abstract
In the theory of electrical machines, there has been a tendency to use mathematically rigorous methods for reducing periodic systems to systems of equations with constant coefficients. Based on a modified method for reducing systems with periodic coefficients to those with constant coefficients, a numerical-analytical method for constructing simplified mathematical models of multiphase valve machines is proposed. Numerical-analytical calculations carried out using this method take into account the non-stationary properties of periodic systems of valve machine equations and are valid when analyzing electromechanical processes in a wide range of rotor speeds. With the algorithm of the keys and the topology of the equivalent circuits known, for each equivalent circuit it is possible to compose a system of differential equations of the minimum order (according to the number of conductive valves) and then solve it until the state of one of the circuit's valves changes. The "merging" of solutions of differential equations corresponding to different switching intervals is carried out by the usual method of fitting. This approach is called the variable structure method and is used in the study of normal operating modes of operation of a valve synchronous generator, when the sequence of formation of equivalent circuits is predetermined from the previous results of a full-scale experiment, or by

mathematical modeling on a computer using universal mathematical models. The proposed method is recommended to be used, for example, in the analysis and synthesis of voltage regulators, as well as for comparing the results obtained with the results of numerical experiments based on higher-level modeling programs.

Keywords
mathematical model, multiphase valve machines, electromechanical processes

For citation
Daneev A.V., Daneev R.A., Sizykh V.N., Khomenko A.P. Kvazianaliticheskii metod postroyeniya uproshchennykh matematicheskikh modelei ventil'nykh sinkhronnykh mashin [Quasi-analytical method for solution of differential equations of electric machine valve systems]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2022, no. 3 (75), pp. 29–37. – DOI: 10.26731/1813-9108.2022.3(75).29-37.

Article info
Received: September 7, 2022; Revised: September 13, 2022; Accepted: September 14, 2022

Введение

В настоящее время все больше внимания уделяется решению задач математического моделирования синхронных машин (СМ). При этом возникают вопросы, связанные с выбором рациональных форм представления моделей и рекомендациями по их практическому применению для исследования различных режимов работы СМ. В известной литературе эти вопросы, как правило, рассматриваются недостаточно полно. То же самое можно отнести к расчету вентильных синхронных машин (ВМ).

Анализ переходных процессов в ВМ может быть выполнен по математическим моделям (ММ), полученным в различных системах координат. Такие модели могут быть составлены на основе уравнений с периодическими коэффициентами, записанных относительно мгновенных значений переменных. Непреобразованные уравнения позволяют достаточно просто учесть все виды несимметрии фаз и нагрузки. Кроме того, увеличение числа фаз (а, следовательно, и числа дифференциальных уравнений) не усложняет расчет электромагнитных переходных процессов на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ).

Следует отметить, что решение периодических систем на ЭВМ приводит к большим затратам машинного времени. Поэтому на практике применяют различные методы преобразования координат, позволяющие избавиться от периодических коэффициентов.

При моделировании многофазных СМ наибольшее распространение получило преобразование к вращающимся осям *d, q*, 0. Однако, если для трехфазных СМ переход к системе с постоянными коэффициентами не вызывает существенных затруднений, то иначе дело обстоит с приведением исходных уравнений шестифазной СМ.

Известен подход, что на основе матрицы симметричных составляющих получены обобщенные на случай многофазной СМ линейные преобразования [1, 2]. При этом для обмотки СМ с четным числом фаз элементы матрицы преобразования являются мнимыми величинами.

В то же время существует вещественное преобразование к системе уравнений с постоянными коэффициентами за счет приведения соответствующих фаз статорной обмотки СМ к различным координатным осям (d, q и 2α, 2β).

Таким образом, отсутствие единого подхода к математическому описанию шестифазной СМ уравнениями с постоянными коэффициентами приводит к необходимости разработки новых методов математического моделирования СМ.

В настоящее время в теории электрических машин наметилась тенденция к применению строгих в математическом смысле методов приведения периодических систем к системам уравнений с постоянными коэффициентами [1, 2]. В работе [3] был предложен модифицированный метод приведения и получены матрица постоянных коэффициентов B и матрица преобразования $V(t)$ в замкнутой аналитической форме:

$$B = \frac{1}{T}\int_0^T A(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

$$V(t) = \exp\left[\int_0^t \{A(\tau) - B\}d\tau\right], \qquad (2)$$

или с учетом первых двух слагаемых в матричном ряде Тейлора:

$$V(t) = E + \int_0^t \{A(\tau) - B\}d\tau, \qquad (3)$$

где $A(t)$ – матрица периодических коэффициентов.

Постановка задачи

На основе полученных в работах [4, 5] уравнений состояния вентильного магнитоэлектрического генератора (МЭГ) с однополупериодными и мостовыми схемами выпрямления покажем возможность применения данного метода к разработке упрощенных математических моделей.

Главное допущение при составлении упрощенных ММ вентильного МЭГ – представление вентилей идеальными ключами [6]. При этом расчет переходных процессов сводится к последовательному анализу ряда линейных схем замещения ВМ.

Если известны алгоритм работы ключей и топология схем замещения, то для каждой схемы замещения можно составить систему дифференциальных уравнений минимального порядка (по числу проводящих вентилей) и затем решать ее до того момента времени, пока состояние одного из вентилей схемы не изменится. «Сливание» решений дифференциальных уравнений, соответствующих различным межкоммутационным интервалам, осуществляется обычным методом припасовывания [7, 8]. Такой подход получил название метода переменной структуры [6–8] и применяется при исследовании нормальных эксплуатационных режимов работы вентильного синхронного генератора (ВГ), когда последовательность образования схем замещения заранее определена из предшествующих результатов натурного эксперимента, либо путем математического моделирования на ЭВМ с помощью универсальных ММ.

Квазианалитический метод построения упрощенных математических моделей вентильных синхронных машин

Нормальные режимы работы вентильного МЭГ характеризуются определенной повторяемостью схем замещения. Так, для нулевых схем замещения (без уравнительного реактора) нормальным является режим проводимости двух или одного вентилей (режим 2-1), для мостовых схем выпрямления – режим 3-2. Поэтому при нормальной работе ВМ выделим некоторый интервал повторяемости, равный периоду пульсаций напряжения:

$$\lambda_{П} = \frac{T}{N_{П}},$$

где $N_{П} = K_{В} m$ – число пульсаций за период переменного тока,

$$K_{B} = \begin{cases} 2, \text{ для мостовых схем выпрямления}, \\ (m = 2p+1,\ p = 1, 2, \ldots) \\ 1, \text{ для нулевых схем выпрямления}; \end{cases},$$

где m – число фаз ВГ.

В свою очередь период пульсаций $\lambda_{П}$ может состоять из двух подынтервалов непрерывности: коммутационного и межкоммутационного.

Разделим основной период $[0,\ T]$ на $N_{П}$ интервалов (t_{k-1}, t_k), $k = 1, 2,\ldots, N_{П}$, т. е.

$$T = \sum_{k=1}^{N_{П}} T_k,$$

где $T_k = t_k - t_{k-1} = \dfrac{T}{N_{П}}$, $t_0 = 0$, $t_{N_{П}} = T$.

С учетом свойства линейности интеграла формула (1) запишется в виде:

$$B = \sum_{k=1}^{N_{П}} B_k, \tag{4}$$

где

$$B_k = \frac{1}{N_{П} T_k} \cdot \int_0^{T_k} A\big(\tau - (k-1)\cdot T_k\big) d\tau =$$

$$= \frac{1}{N_{П} T_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A\big(\tau - (k-1)\cdot T_k - t_{k-1}\big) d\tau.$$

По аналогии с (4) разобьем интервал времени $[t_{k-1}, t_k]$ на n подынтервалов. Выражение (3) приводится к рекуррентному соотношению следующего вида:

$$V_j = V_{j-1} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} A(\tau) d\tau - B_k\left(t_j - t_{j-1}\right),$$

$$V_0 = E,\ V_k = V_{П},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$V_j = V_{j-1} + \int_0^{T_j} \left\{ A\left(\tau + t_{j-1}\right) d\tau - B_k \right\} d\tau, \tag{5}$$

где $T_j = t_j - t_{j-1} = \dfrac{T_k}{n}$ – шаг дискретности вычислений матрицы преобразования на k-ом интервале непрерывности.

Пусть исходная периодическая система

$$\frac{di}{dt} = A(t) i + U$$

с помощью подстановки

$$i = V(t) y$$

приводится к виду

$$\frac{di}{dt} = B\, y + u, \tag{6}$$

где y – вектор переменных состояния системы (6); U – вектор возмущения исходной системы; $u = V^{-1}(t)U$ – вектор возмущений преобразованной системы (6); $B = V^{-1}(t) \cdot A(t) \cdot V(t)$ – матрица постоянных коэффициентов.

Тогда из уравнений (4) и (5) следует простой способ описания работы ВГ:

1. Аналитическим путем вычисляем матрицу постоянных коэффициентов B_k и матрицу преобразования V_j на k-ом интервале повторяемости по формулам (4) и (5).

2. По формуле:

$$\frac{dy_j}{dt} = B_k y_j + u_j, \; u_j = V_j^{-1} U_j$$

при начальных условиях $y_k(0) = y_{k-1}(t_{k-1})$ с шагом интегрирования T_j находим вектор преобразованных переменных состояния y_k.

3. По соотношению $i_k = V_k y_k$ вычисляем переменные состояния исходной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [3].

Описанная процедура вычислений соответствует случаю, когда переключение с одного вентиля на другой происходит мгновенно.

Рассмотрим случай простой коммутации, соответствующий нормальному квазиустановившемуся режиму работы ВГ.

Основной период $[0, T]$ разделим на $2N_\Pi$ чередующихся коммутационных и межкоммутационных подынтервалов непрерывности (рис.), т. е.

$$T = \sum_{k=1}^{N_\Pi} T_k = \sum_{k=1}^{N_\Pi} T_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_\Pi} T_k^{(2)},$$

где $T_k^{(1)} = t_k^{(1)} - t_{k-1}^{(1)} = \dfrac{\gamma_k}{\omega}$ – k-ый коммутационный подынтервал непрерывности; $\Delta\alpha_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$ – приращение угла управления вентилями на k-ом интервале;

$$t_k^{(1)} = \frac{(\alpha_{k-1} + \gamma_k)}{\omega}; \;\; t_k^{(2)} = \frac{T}{N_\Pi} + \frac{\alpha_k}{\omega}; \;\; t_{k-1}^{(1)} = \frac{\alpha_k}{\omega};$$

$$t_{k-1}^{(2)} = t_k^{(1)}; \sum_{k=1}^{N_\Pi} \Delta\alpha_k = 0; \;\; \alpha_{N_\Pi} = \alpha_0; \;\; T_k = \frac{T}{N_\Pi} + \frac{\Delta\alpha_k}{\omega},$$

где ω – угловая частота.

С учетом принятого разделения формула (1) принимает вид

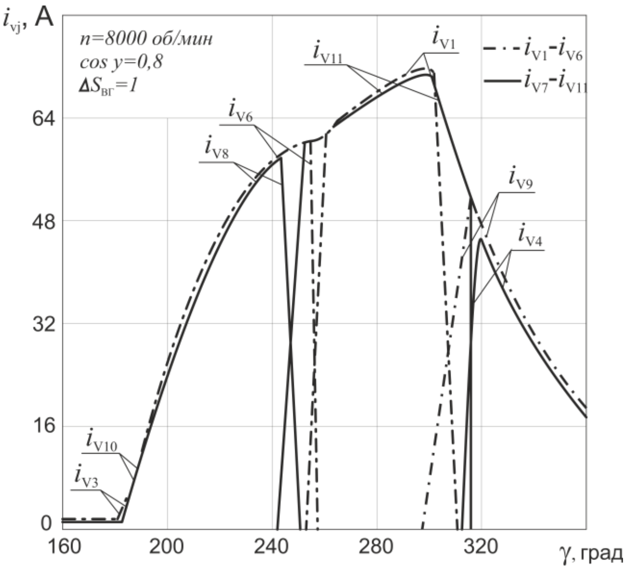
$$B = \sum_{k=1}^{N_\Pi} B_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_\Pi} B_k^{(2)},$$

где $B_k^{(1)} = \dfrac{1}{N_\Pi T_k} \displaystyle\int_0^{T_k^{(1)}} A\big(\tau - (k-1) \cdot T_k\big) d\tau$ – матрица постоянных коэффициентов в k-ый подынтервал коммутации;

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{N_\Pi T_k} \int_0^{T_k^{(2)}} A\Big(\tau - (k-1) \cdot T_k - T_k^{(1)}\Big) d\tau$$

– матрица постоянных коэффициентов в k-ый межкоммутационный подынтервал.

При дальнейшем уменьшении сопротивления нагрузки вентили проводят группами по 4 ($\gamma_k = 60°$). Данный режим проводимости вентилей сохраняется до возникновения аварийных режимов.



Напряжение на выходе выпрямителя и ток вентилей, поясняющие процессы коммутации

Rectifier output voltage and valve current explaining switching processes

Матрица преобразований (3) для чередующихся подынтервалов может быть представлена в виде

$$V_k = V_k^{(1)} + V_k^{(2)},$$

где

$$V_k^{(1)} = V_{k-1}^{(2)} + \int_0^{t_k^{*(1)} - t_{k-1}^{*(2)}} A\Big(\tau + t_{k-1}^{*(2)}\Big) \cdot d\tau - B_k^{(1)} \cdot \Big(t_k^{*(1)} - t_{k-1}^{*(2)}\Big);$$

$$V_k^{(2)} = \int_0^{t_k^{*(2)}} A\Big(\tau + t_k^{*(1)}\Big) \cdot d\tau - B_k^{(2)} \cdot t_k^{*(2)};$$

$t_k^{*(1)} \in \left[t_{k-1}^{*(2)},\, T_k^{(1)}\right]$; $t_k^{*(2)} \in \left[T_k^{(1)},\, T_k^{(2)}\right]$; $t_k^{*} = t_k^{*(1)} + t_k^{*(2)}$; $t_k^{*(1)}$ – верхний переменный предел интегрирования для k-го коммутационного подынтервала непрерывности; $t_k^{*(2)}$ – верхний переменный предел интегрирования для k-го межкоммутационного подынтервала непрерывности.

Из уравнений (7), (8) вытекает следующий способ описания работы ВГ в случае простой коммутации:

1. Определяем аналитическим путем матрицу постоянных коэффициентов и матрицу преобразования в коммутационный подынтервал $\left[0, T_k^{(1)}\right]$ по формулам:

$$B_k^{(1)} = \frac{1}{N_{\Pi} \cdot T_k} \int_0^{T_k^{(1)}} A\left(\tau - (k-1)\cdot T_k\right) \cdot d\tau,$$

$$V_k^{(1)} = V_{k-1}^{(2)} + \int_0^{t_k^{*(1)} - t_{k-1}^{*(2)}} A\left(\tau + t_{k-1}^{*(2)} - B_k^{(1)}\right) d\tau,$$

$$t_k^{*(1)} \in \left[t_{k-1}^{*(2)},\, T_k^{(1)}\right].$$

Формулу, определяющую решение дифференциальных уравнений (6) с постоянными коэффициентами в форме Коши, представим в виде:

$$y_k\left(t_k^{*(1)}\right) = \exp\left[B_k^{(1)}\left(t_k^{*(1)} - t_{k-1}^{*(2)}\right)\right] \cdot y_{k-1}\left(t_k^{*(2)}\right) + \int_{t_{k-1}^{*(2)}}^{t_k^{*(1)}} \exp\left[B_k^{(1)}\left(t_k^{*(1)} - \tau\right)\right] \cdot u(\tau) d\tau$$

и найдем ее аналитическое решение на интервале времени $\left[t_{k-1}^{*(2)},\, T_k^{(1)}\right]$.

2. Аналогичным образом осуществляется процесс вычислений для k-го межкоммутационного интервала $\left[T_k^{(1)},\, T_k^{(2)}\right]$:

$$V_k^{(2)} = \frac{1}{N_{\Pi} T_k} \int_0^{T_k^{(2)}} A\left(\tau - (k-1)T_k - T_k^{(1)}\right) \cdot d\tau,$$

$$V_k^{(2)} = \int_0^{t_k^{*(2)}} \left\{A\left(\tau + t_k^{*(1)}\right) - B_k^{(2)}\right\} d\tau,$$

$$y_k\left(t_k^{*(2)}\right) = \exp\left[B_k^{(2)}\left(t_k^{*(2)} - T_k^{(1)}\right)\right] \cdot y_k\left(T_k^{(1)}\right) + \int_{T_k^{(1)}}^{t_k^{*(2)}} \exp\left[B_k^{(2)}\left(t_k^{*(2)} - \tau\right)\right] \cdot u(\tau) d\tau.$$

3. Последнее матричное уравнение при $t_k^{*(2)} = T_k^{(2)}$ позволяет путем моделирования на ЭВМ системы трансцендентных уравнений определить угол коммутации γ_k на k-ом интервале непрерывности схем замещения ВГ.

После выяснения связи между значениями переменных в начале и в конце интервала повторяемости формируется краевая задача, которая решается на ЭВМ обычными итерационными методами.

Таким образом, процедура определения вектора состояния исходной периодической системы уравнений ВГ позволяет составить квазианалитический алгоритм решения системы дифференциальных уравнений с переменной структурой во всем временном интервале, так как схемы замещения через период работы в нормальном эксплуатационном режиме повторяются.

Вектор состояния исходной системы уравнений ВГ определяется по формулам:

$$i_k^{(1)} = V_k^{(1)} y_k^{(1)}; \; i_k^{(2)} = V_k^{(2)} y_k^{(2)}.$$

Вектор мгновенных значений выпрямленного напряжения при активно-индуктивной нагрузке генератора равен

$$u_{dH}^{(1)} = R_H i_k^{(1)} + L_H \frac{di_k^{(1)}}{dt}; \; u_{dH}^{(2)} = R_H i_k^{(2)} + L_H \frac{di_k^{(2)}}{dt}.$$

Следовательно, в предложенном квазианалитическом методе построения упрощенных ММ при учете простой коммутации вентилей исходная нелинейная система уравнений ВМ на интервалах повторяемости схем замещения рассматривается как совокупность линейных периодических систем уравнений с неизвестными заранее граничными условиями. Применение метода приведения [3] позволяет преобразовать системы уравнений с периодическими коэффициентами к системам уравнений с постоянной матрицей коэффициентов при любом режиме работы ВГ. Цель такого преобразования заключается в том, что дифференциальные уравнения с постоянной матрицей коэффициентов при векторе состояния поддаются аналитическому решению и позволяют сформулировать краевую задачу для определения неизвестных граничных условий. Из трансцендентных уравнений, полученных в результате аналитического решения преобразованной системы уравнений ВГ, с использованием ЭВМ определяются углы коммутации вентилей в заданном временном интервале.

Достоинством предлагаемого квазианалитического метода является то, что полученные выражения (4), (5) или (7), (8), в отличие от метода Еругина – Бреуса [2], в котором аналитические выражения для матриц $V(t)$ и B зависят от сходимости степенных рядов относительно величины $1/\omega$, справедливы при любых значениях угловых скоростей ω, не равных нулю.

Очевидным недостатком метода становится сильно возрастающая сложность и объем вычислений для отличных от нормальных эксплуатационных режимов работы ВГ. Поэтому при анализе, например, аварийных режимов более предпочтительным является использование универсальных ММ [4, 5].

Применение квазианалитического метода к решению задачи математического моделирования для случая мгновенной коммутации вентилей покажем на примере трехфазного МЭГ.

Пример. Уравнения МЭГ, работающего на нулевую схему выпрямления, имеют вид [4]:

$$\left(L + KL_H K^T\right)\frac{di_V}{dt} = -\left(R + KR_H K^T + \frac{dL}{dt}\right)i_V + e_M - u_V,$$

где R, L – матрицы параметров фаз генератора; R_H, L_H – параметры нагрузки; i_V, u_V – векторы токов и напряжений вентилей; $K = [11\ldots1]^T$ – фундаментальная матрица контуров; e_M – вектор гармонических ЭДС источника (постоянного магнита).

При представлении вентиля идеальным ключом:

– для вентиля, проводящего ток, $u_V = 0$, а ток через него определяется токами и напряжениями во всех других элементах схемы;

– для вентиля, не проводящего ток, $i_V = 0$, а напряжение на нем определяется напряжениями и токами во всех других элементах схемы ВГ, т. е.

$$R_V(i_V) = \begin{cases} 0, \text{при} i_V > 0 \\ \infty, \text{при} i_V \le 0 \end{cases}.$$

Для $m = 3$ $T_K = \frac{2\pi}{3}$. Тогда при мгновенной коммутации вентилей достаточно выделить три интервала постоянства схем замещения ВГ.

Для интервала $0 \le \beta \le \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{di_1}{d\beta} = A_1(\beta)i_1 + U_1(\beta),$$

где

$$A_1(\beta) = -\frac{R_{\phi 1} + R_H + \frac{dL_1}{d\beta}}{L_1}; \quad U_1(\beta) = \frac{E_m \sin\beta}{L_1};$$

$$L_1 = l_0^1 + l_2 \cos 2\beta; \quad l_0^1 = l_0 + L_H; \quad \beta = \beta_0 + \omega\tau_1;$$

τ_1 – текущее время.

Для интервала $\frac{2\pi}{3} < \beta \le \frac{4\pi}{3}$ $\frac{di_2}{d\beta} = A_2(\beta)i_2 + U_2(\beta)$,

где

$$A_2(\beta) = -\frac{R_{\Phi 2} + R_H + \frac{dL_2}{d\beta}}{L_2}; \quad U_2(\beta) = \frac{E_m \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right)}{L_2};$$

$$L_2 = l_0^1 + l_2 \cos\left(2\beta - \frac{2\pi}{3}\right);$$

для интервала $\frac{4\pi}{3} < \beta \le 2\pi$ $\frac{di_3}{d\beta} = A_3(\beta)\cdot i_3 + U_3(\beta)$,

где

$$A_3(\beta) = -\frac{R\varphi_3 + R_H + \frac{dL_3}{d\beta}}{L_3}; \quad \upsilon_3(\beta) = \frac{E_m \sin\left(\beta + \frac{2\pi}{3}\right)}{L_3};$$

$$L_3 = l_0^1 + l_2 \cos\left(2\beta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Здесь $A_k(\beta)$ – матрица (в данном случае скаляр), составленная из ненулевых элементов исходной матрицы периодических коэффициентов $A(\beta) = -\left(L + KL_H K^T\right)^{-1}\cdot\left(R + KR_H K^T + \frac{dL}{d\beta}\right)$ на k-ом интервале постоянства схем замещения.

Вырождающиеся в скаляры матрица постоянных коэффициентов и матрицы преобразования, вычисленные аналитически по формулам (4) и (5) для различных интервалов повторяемости, имеют вид:

$$B_1 = \frac{1}{T}\int_0^{T_k} A(\omega\tau)d(\omega\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|1 - \frac{l_2}{2l_0^1}\right| + \frac{R_{\phi 1} + R_H}{\sqrt{\left(l_0^1\right)^2 - l_2^2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3\left(l_0^1 - l_2\right)}{l_0^1 + l_2}}\right)\right\};$$

$$B_2 = \frac{1}{T}\int_0^{T_k} A\left(\omega\tau - \frac{2\pi}{3}\right)d(\omega\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|\frac{l_0^1 + l_2}{l_0^1 - 0{,}5l_2}\right| - \frac{R_{\phi 2} + R_H}{\sqrt{\left(l_0^1\right)^2 - l_2^2}}\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{3\left(l_0^1 - l_2\right)}{l_0^1 + l_2}}\right)\right\};$$

$$B_3 = \frac{1}{T}\int_0^{T_k} A\left(\omega\tau - \frac{4\pi}{3}\right)d(\omega\tau) = 0.$$

На интервале повторяемости $0 \le \beta \le \dfrac{2\pi}{3}$

$$V_j = V_{j-1} - \ln\left|\frac{l_0^1 + l_2\cos\left(\omega\left(2T_j + t_{j-1}\right)\right)}{l_0^1 + l_2\cdot\cos\omega t_{j-1}}\right| - \frac{R_{\phi 1} + R_H}{\sqrt{\left(l_0^1\right)^2 - l_2^2}} \times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} arctg\left(\sqrt{\dfrac{l_0^1 - l_2}{l_0^1 + l_2}}tg\left(\omega\left(T_j + \dfrac{t_{j-1}}{2}\right)\right)\right) - \\ -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{l_0^1 - l_2}{l_0^1 + l_2}}tg\,\dfrac{\omega t_{j-1}}{2}\right)\end{array}\right\} - B_j T_j.$$

На интервале $\dfrac{2\pi}{3} < \beta \le \dfrac{4\pi}{3}$

$$V_j = V_{j-1} - \ln\left|\frac{l_0^1 + l_2\cos\left(2\omega T_j - \dfrac{2\pi}{3} + \omega t_{j-1}\right)}{l_0^1 + l_2\cdot\cos\left(\omega t_{j-1} - \dfrac{2\pi}{3}\right)}\right| - \frac{R_{\phi 2} + R_H}{\sqrt{\left(l_0^1\right)^2 - l_2^2}} \times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l} arctg\left(\sqrt{\dfrac{l_0^1 - l_2}{l_0^1 + l_2}}tg\left(\omega T_j - \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\omega t_{j-1}}{2}\right)\right) - \\ -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{l_0^1 - l_2}{l_0^1 + l_2}}tg\left(\dfrac{\omega t_{j-1}}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\end{array}\right\}.$$

Здесь, как и в (5), T_j – шаг численного интегрирования, j=1, 2, …, n; $V_k = V_n$.

Таким образом, порядок расчета трехфазного вентильного МЭГ при мгновенной коммутации сводится к следующему:

1. Вычисляются матрицы B_k, V_k, k = 1, 2, 3.

2. Решается на ЭВМ при k = 1 дифференциальное уравнение $\dfrac{dy_1}{dt} = B_1 y_1 + V_1^{-1}U_1(t)$ с шагом численного интегрирования T_j; при начальных условиях $y_1(0) = y_0$.

3. Находится значение тока исходного уравнения:

$$i_1 = V_1 y_1.$$

4. Определяется напряжение на R-L нагрузке

$$u_{H_1} = L_H\,\frac{di_1}{dt} + R_H i_1.$$

5. Пункты 2–4 повторяются для k = 2, 3 при начальных условиях

$$y_2(0) = y_1\left(\frac{2\pi}{3}\right);\; y_3(0) = y_2\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Через период процедура вычислений повторяется.

Длина шага интегрирования T_j внутри интервала непрерывности может быть выбрана достаточно большой. Если длина шага совпадает с интервалом неизменного состава открытых вентилей (j = k), то рекуррентное соотношение (5) становится разностным уравнением, которое, как и в случае простой коммутации вентилей, решается аналитически.

Заключение

На основе модифицированного метода приведения систем с периодическими коэффициентами к системам с постоянными коэффициентами предложен численно-аналитический метод построения упрощенных ММ многофазных ВМ. Численно-аналитические расчеты, проводимые с помощью данного метода, учитывают нестационарные свойства периодических систем уравнений ВМ и справедливы при анализе электромеханических процессов в широком диапазоне изменения частот вращения ротора. Предлагаемый метод рекомендуется применять, например, при анализе и синтезе регуляторов напряжения, а также для сравнения полученных результатов с результатами численных экспериментов на основе моделирующих программ более высокого уровня.

Ряд близких и смежных вопросов моделирования объектов такой физической природы рассмотрен в работах [6–18].

Список литературы

1. Трещев И.И. Методы исследования машин переменного тока. Л. : Энергия, 1969. 235 с.
2. Лупкин В.М. Теория несимметричных переходных процессов синхронной машины. Л. : Наука, 1985. 147 с.
3. Данеев А.В., Данеев Р.А., Сизых В.Н. Моделирование многофазных синхронных машин в различных системах координат // Изв. Самар. науч. центра Рос. Акад. наук. 2020. Т. 22. № 4. С. 104–115.
4. Александров А.А., Данеев Р.А., Сизых В.Н. К вопросу моделирования вентильных синхронных машин на основе квазианалитического метода // Изв. Самар. науч. центра РАН. 2019. Т. 21. № 4. С. 63–69.
5. Дедовский А.Н. Электрические машины с высококоэрцитивными постоянными магнитами. М. : Энергоатомиздат, 1985. 168 с.
6. Брон Л.П. Методы анализа на ЦВМ вентильных систем как схем с переменной структурой // Преобразовательная техника. 1977. С. 153–150.

7. Семейкин В.Д. Методы анализа динамики электромагнитных процессов в вентильных преобразователях. М : Информэлектро, 1979. 61 с.

8. Podiyar K.R., Kalra P.K. Analysis ofen HVDC Converter with Jinite Smoothing Reactor/ Part I-II // Electric Power Systems Research. N 11/ 1986/ P. 171-193.

9. Данеев А.В., Сизых В.Н. Алгоритмическое обеспечение конструирования оптимальных регуляторов по неклассическим функционалам качества в вырожденной формулировке // Информационные технологии, их приложения и информационное образование : материалы II Междунар. науч. конф. Улан-Удэ, 2021. С. 74–79.

10. Дижур Д.П. Цифровое моделирование электропередач постоянного тока // Передача энергии постоянным током. М. : Энергоатомиздат, 1985. С. 51–63.

11. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М. : Наука, 1979. 208 с.

12. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М. : Высш. шк., 1988. 335 с.

13. Конев Ф.Б., Ярлыкова Н.Е. Методы численного решения систем дифференциальных уравнений, применяемые в цифровых моделях вентильных преобразователей. М. : Информэлектро, 1978. 50 с.

14. Лукин В.Н., Романов М.Ф., Толкачев Э.А. Системный анализ электрических цепей и машин. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. 136 с.

15. Беляев П.В. Некоторые свойства математических моделей динамики статических преобразователей энергии // Динамика электрических машин. Омск : ОПИ, 1984. С. 68–74.

16. Сипайлов Г.А., Лоос А.В. Математическое моделирование электрических машин. М. : Высш. шк., 1980. 175 с.

17. Особенности электромагнитного расчета генераторов с редкоземельными постоянными магнитами / И.И. Алексеев, Б.С. Зайчихин, М.Г. Клейман и др. // Электричество. 1985. № 11. С.27–30.

18. Арешян Г.Л. Вопросы преобразования дифференциальных уравнений многофазных электрических машин // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 5. С. 52–62.

References

1. Treshchev I.I. Metody issledovaniya mashin peremennogo toka [Methods for the research of alternating current machines]. Leningrad: Energiya Publ., 1969. 235 p.

2. Lupkin V.M. Teoriya nesimmetrichnykh perekhodnykh protessov sinkhronnoi mashiny [Theory of asymmetric transient processes of a synchronous machine]. Leningrad: Nauka Publ., 1985. 147 p.

3. Daneev A.V., Daneev R.A., Sizykh V.N. Modelirovanie mnogofaznykh sinkhronnykh mashin v razlichnykh sistemakh koordinat [Modeling of multi-phase synchronous machines in different coordinate systems]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi Akademii nauk* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2020, vol. 22, no. 4, pp. 104 – 115.

4. Aleksandrov A.A., Daneev R.A., Sizykh V.N. K voprosu modelirovaniya ventil'nykh sinkhronnykh mashin na osnove kvazianaliticheskogo metoda [On the issue of modeling valve synchronous machines based on a quasi-analytical method]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2019, vol. 21, no. 4, pp. 63-69.

5. Dedovskii A.N. Elektricheskie mashiny s vysokokoertsitivnymi postoyannymi magnitami [Electrical machines with high-coercivity permanent magnets]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1985. 168 p.

6. Bron L.P. Metody analiza na TSVM ventil’nykh system kak skhem s peremennoi strukturoi [Methods of analysis on a digital computer of valve systems as circuits with a variable structure]. *Preobrazovatel'naya tekhnika* [Converter technology], 1977, pp. 153–150.

7. Semeikin V.D. Metody analiza dinamiki elektromagnitnykh protessov v ventik’nykh preobrazovatelyakh [Methods for analyzing the dynamics of electromagnetic processes in valve converters]. Moscow: Informelektro Publ., 1979. 61 p.

8. Podiyar K.R., Kalra P.K. Analysis ofen HVDC Converter with Jinite Smoothing Reactor. Part I-II. *Electric Power Systems Research*, 1986, no. 11, pp. 171-193.

9. Daneev A.V., Sizykh V.N. Algoritmicheskoe obespechenie konstruirovaniya optimal'nykh regulyatorov po neklassicheskim funktsionalam kachestva v vyrozhdennoi formulirovke [Algorithmic Support for the Design of Optimal Controllers from Nonclassical Performance Functionals in a Degenerate Formulation]. *Materialy II Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii «Informatsionnye tekhnologii, ikh prilozheniya i informatsionnoe obrazovanie»* [Proceedings of the II International Scientific Conference «Information technologies, their applications and information education»]. Ulan-Ude, 2021, pp. 74-79.

10. Dizhur D.P. Tsifrovoe modelirovanie elektroperedach postoyannogo toka [Digital modeling of direct current power transmission]. *Peredacha energii postoyannym tokom* [Energy transmission by direct current]. Moscow: Energoatomizdat, 1985, pp. 51-63.

11. Rakitskii Yu.V., Ustinov S.M., Chernorutskii I.G. Chislennye metody resheniya zhestkikh sistem [Numerical methods for solving stiff systems]. Moscow: Nauka Publ., 1979. 208 p.

12. Demirchyan K.S., Butyrin P.A. Modelirovanie i mashinnyi raschet elektricheskikh tsepei [Modeling and machine calculation of electrical circuits]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1988. 335 p.

13. Konev F.B., Yarlykova N.E. Metody chislennogo resheniya sistem differentsial'nykh uravnenii, primenyaemye v tsifrovykh modelyakh ventil'nykh preobrazovatelei [Methods for the numerical solution of systems of differential equations used in digital models of valve converters]. Moscow: Informelektro Publ., 1978. 50 p.

14. Lukin V.N., Romanov M.F., Tolkachev E.A. Sistemnyi analiz elektricheskikh tsepei i mashin [System analysis of electrical circuits and machines]. Leningrad: LGU Publ., 1985. 136 p.

15. Belyaev P.V. Nekotorye svoistva matematicheskikh modelei dinamiki staticheskikh preobrazovatelei energii [Some properties of mathematical models of the dynamics of static energy converters]. *Dinamika elektricheskikh mashin* [Dynamics of electrical machines]. Omsk: OPI Publ., 1984, pp. 68-74.

16. Sipailov G.A., Loos A.V. Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin [Mathematical modeling of electrical machines]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1980, 175 p.

17. Alekseev I.I., Zaichikhin B.S., Kleiman M.G., Starovoitova N.P. Osobennosti elektromagnitnogo rascheta generatorov s redkozemel'nymi postoyannymi magnitami [Features of the electromagnetic calculation of generators with rare earth permanent magnets]. *Elektrichestvo* [Electricity], 1985, no. 11, pp.27–30.

18. Areshyan G.L. Voprosy preobrazovaniya differentsial'nykh uravnenii mnogofaznykh elektricheskikh mashin [Problems of transformation of differential equations of multiphase electrical machines]. *Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport* [Bulletins of Academy of Sciences of USSR. Energy and transport], 1982, no. 5, pp. 52–62.

Информация об авторах

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и защиты информации, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск; e-mail: daneev@mail.ru.

Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-правовых дисциплин, Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск; e-mail: romasun@mail.ru.

Сизых Виктор Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автоматизации производственных процессов, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск; e-mail: sizykh_vn@mail.ru

Хоменко Андрей Павлович, доктор технических наук, профессор, президент, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск; e-mail: homenko_ap@irgups.ru

Information about the authors

Alexei V. Daneev, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of Department of the Information Systems and Information Protection, Irkutsk State Transport University, Irkutsk; e-mail: daneev@mail.ru.

Roman A. Daneev, Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor of Department of the Information and Legal Disciplines, East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk; e-mail: romasun@mail.ru.

Victor N. Sizykh, Doctor of Engineering Science, Full Professor, Professor of Department of the Automation of Production Processes, Irkutsk State Transport University, Irkutsk; e-mail: sizykh_vn@mail.ru

Andrei P. Khomenko, Doctor of Engineering Science, Full Professor, President, Irkutsk State Transport University, Irkutsk; e-mail: homenko_ap@irgups.ru